VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

# El cambio de datum ED50 - ETRS89. Métodos y resultados.

**González-Matesanz, F.J. [(1)], Quiros R. [(1)], Cano, M. [(1)]**
**, Sánchez Sobrino, J. [(1)] y Dalda, A. [(1)]**
[(1)] Instituto Geográfico Nacional, fjgmatesanz@mfom.es,rquiros@mfom.es, macano@mfom.es, jassobrino@mfom.es, adalda@mfom.es

***RESUMEN***

*El cambio de datum en cualquier país es sin duda uno de los problemas técnicos. Existe una gran comunidad de usuarios que utilizan de manera directa o indirecta cartografía y sistemas de navegación basados en Sistemas Geodésicos de Referencia espaciales como WGS84, o ETRS89 en Europa, a pesar de que sigue siendo oficial para fines cartográficos y topográficos un datum local, en España ED50. Es necesario realizar una transición de datum local a geocéntrico de forma muy certera considerando todas las posibilidades. En esta comunicación se presentan todos los métodos ensayados para llevar a cabo esta transformación, desde las transformaciones simples de 5 y 7 parámetros hasta la Colocación Mínimo Cuadrática o las Superficies de Mínima Curvatura.*

## 1. INTRODUCCION.

El objeto de este artículo es mostrar los métodos empleados para definir la transformación oficial de datum para realizar la transición de ED50 a ETRS89. Los dos juegos de coordenadas proporcionados por la red REGENTE así como otras redes de 4º orden calculadas por otras instituciones proporcionan un marco idóneo para identificar cuál es el mejor método posible. Al final de este artículo se llega a la conclusión de que en los métodos de modelado de distorsión son los adecuados, estos métodos utilizan técnicas de predicción mucho más potentes que los métodos tradicionales. El término "predicción" suele aplicarse a técnicas cercanas a la Colocación Mínimo Cuadrática o sus derivados (Krigging), en este caso concreto la haremos extensible a otras técnicas como las superficies de mínima curvatura o Rubber-Sheeting. El propósito es el siguiente: una vez creado un modelo a través de la red REGENTE (Figura 1) comprobar como se comporta éste cuando tratamos de estimar los valores en puntos de la Red de Orden Inferior (ROI)

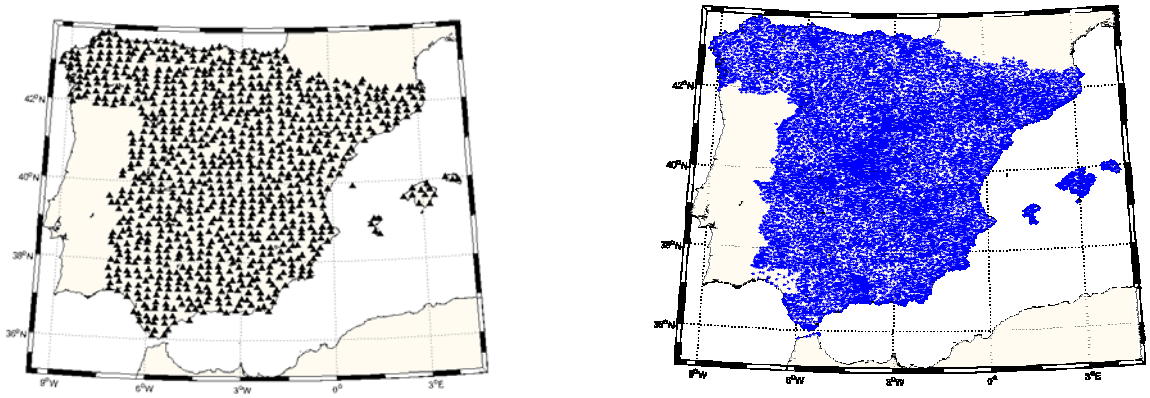


*Figura 1.*- Red REGENTE. A la derecha red de orden inferior (ROI)

## 2. APROXIMACIONES BÁSICAS.

Los primeros métodos que vienen a la cabeza al plantearse realizar la transformación de datum, serían los de 5 y 7 parámetros. Esto es una suposición totalmente lógica, dado que en principio las dos figuras en el espacio (dos elipsoides de distinta forma y tamaño situados en distintos puntos del espacio) deberían de relacionarse

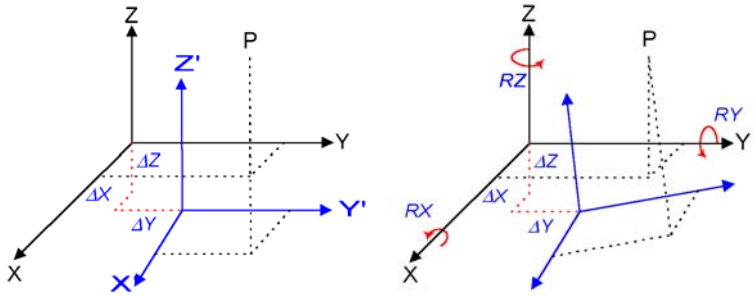



*Figura 1.*-Transformación de 5 y 7 parámetros respectivamente

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004
Madrid, 19-22 Octubre 2004

entre sí por una transformación de semejanza (7 parámetros), si consideramos que ambos polos tienen la misma orientación, como debería de ser un principio, la transformación de 5 parámetros sería la adecuada.

Empleando la transformación de 7 parámetros a nuestra red, muestra diferencias locales, tal y como cabría esperar en cualquier red clásica, no siendo posible abarcar la totalidad de la Península Ibérica obteniendo residuos por debajo de 2m. Por ello, se ha dividido el territorio peninsular en dos partes añadiendo un tercer otro juego de parámetros para las Islas Baleares (Figura 1 derecha). El origen de estas diferencias locales se encuentra en la heterogeneidad que tienen las redes clásicas en su comportamiento y que será explicado más adelante mediante el método de modelado de distorsión.

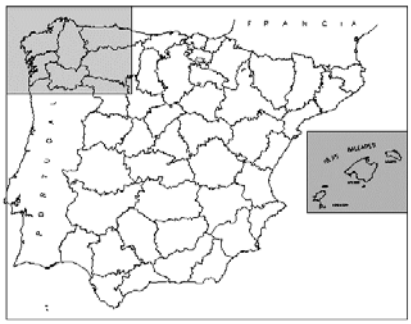


*Figura 1.*- Transformaciones de 7P

Es preciso recordar que tanto esta transformación como la de 5 parámetros se realizan entre coordenadas espaciales. Por tanto, para obtener altitud elipsoidal en ED50 es siempre imprescindible disponer de valores de ondulación en este sistema local que se obtienen de un modelo de geoide (geocéntrico) mediante un proceso iterativo que parte de considerar N=0, o valor conocido, en el punto origen (Datum) o bien con 5/7 parámetros de transformación a priori.

| | NW_PENINS. | PENINSULA | BALEARES |
|---|---|---|---|
| $\Delta X_0$ (m) | 178.383 | 131.032 | 181.4609 |
| $\Delta Y_0$ (m) | 83.172 | 100.251 | 90.2931 |
| $\Delta Z_0$ (m) | 221.293 | 163.354 | 187.1902 |
| $\mu$ (ppm) | -21.2 | -9.39 | -17.57 |
| $\Omega_X$ (“) | 0.5401 | -1.2438 | 0.1435 |
| $\Omega_Y$ (“) | -0.5319 | -0.0195 | 0.4922 |
| $\Omega_Z$ (“) | -0.1263 | -1.1436 | -0.3935 |

| Estadísticas | $E_P$ | $N_P$ | $E_{NWP}$ | $N_{NWP}$ |
|---|---|---|---|---|
| # puntos | 829 | 829 | 162 | 162 |
| Media | 0.03 | 0.18 | 0.02 | -0.07 |
| Std Dev | 0.62 | 0.56 | 0.40 | 0.25 |
| Max | 1.80 | 2.24 | 1.28 | 0.57 |
| Min | -2.28 | -2.37 | -0.80 | -0.76 |
| Rango | 4.08 | 4.61 | 2.08 | 1.33 |
| 95% | 1.23 | 1.11 | 0.79 | 0.50 |
| 99% | 1.54 | 1.39 | 0.99 | 0.62 |

*Tabla 1.* - Juegos de 7 parámetros. A la derecha residuos para la península

La zona NW corresponde a los meridianos y paralelos siguientes: 41º30’N<φ<43º50’N y 9º25’W<λ<4º30’W. Esta transformación, junto con la de 5 parámetros conservaría la conformidad pero presentaría el inconveniente de no ser una transformación única, con los consiguientes problemas de cases entre, por ejemplo, hojas cartográficas.

## 3. APROXIMACION POLINOMIAL.

Si reconocemos que existen estas heterogeneidades en la red clásica (ED50), es lógico pensar que un polinomio pueda absorber de manera más eficaz las heterogeneidades de la red, y así sea planteado el método de transformación mediante polinomios, esta aproximación puede utilizar tanto variable real como compleja. El sentido de utilizar variable compleja es la conformidad de la transformación y que en teoría esta conformidad debería corresponder a la transformación teórica entre datums como se ha mencionado anteriormente (la transformación de semejanza).

En el caso de utilizar variables reales se plantean estos dos polinomios:

$$\varphi' = C_1 + C_2\lambda + C_3\varphi + C_4\lambda^2 + C_5\lambda\varphi + C_6\varphi^2 + C_7\lambda^3 \ldots$$
$$\lambda' = C'_1 + C'_2\lambda + C'_3\varphi + C'_4\lambda^2 + C'_5\lambda\varphi + C'_6\varphi^2 + C'_7\lambda^3 \ldots$$

Si se considera el caso en variable compleja, lo que equivale a imponer a los dos anteriores la condición de conformidad, el polinomio a plantear queda de la siguiente manera:

$$\lambda' + i\psi' = \sum_{j=0}^{n} (K_j + iK_j')(\lambda + i\psi)^j$$

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

donde ψ es la latitud isométrica. La fiabilidad en el cálculo de los coeficientes constituye el verdadero problema de las técnicas de regresión polinómica, y que se resuelve teniendo en cuenta casi una decena de aspectos estadísticos y numéricos.

Para comprobar la utilidad del método se ha procedido a aplicarlo con ambos juegos de coordenadas en proyección UTM huso 30 extendido.

En la Figura 1 se puede observar las diferencias entre ambos datum, se en ambas líneas aproximadamente son ortogonales, reforzando una vez más la idea planteada anteriormente sobre la transformación teórica de semejanza entre los mismos.

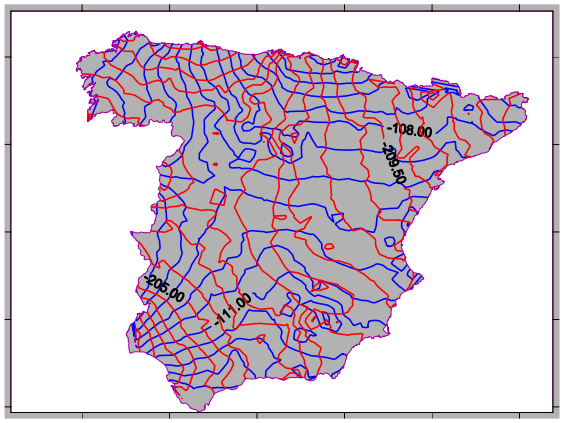



*Figura 1.*- Diferencias ETRS80-ED50

Los resultados de ambos polinomios se muestran en la Figura 2 para el caso de variable real se observa como las líneas no se cortan de forma ortogonal, lo que si sucede con la aproximación en variable compleja.

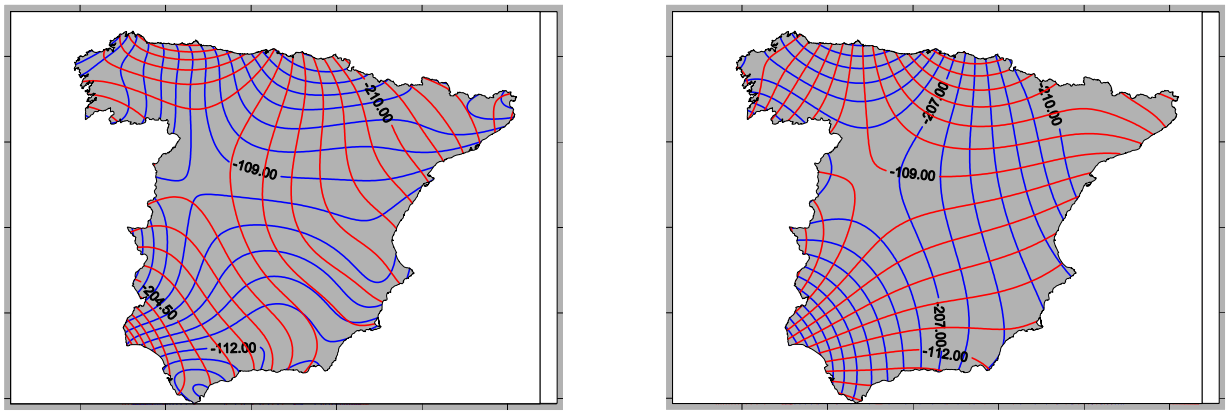



*Figura 2.*- Polinomios real y complejo (figura derecha)

| Estadísticas | E Real | N Real | E | Ni |
|---|---|---|---|---|
| **# puntos** | 991 | 991 | 991 | 991 |
| **Media** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Std Dev** | 0.37 | 0.36 | 0.24 | 0.22 |
| **Max** | 0.98 | 1.48 | 0.94 | 1.03 |
| **Min** | -1.66 | -1.56 | -1.09 | -0.77 |
| **Rango** | 2.64 | 3.04 | 2.03 | 1.80 |
| **95%** | 0.75 | 0.75 | 0.48 | 0.44 |
| **99%** | 0.93 | 0.89 | 0.60 | 0.55 |

*Tabla 2.*- Transformación polinómica real y compleja. Residuos

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

## 4 MODELADO DE DISTORSIÓN. ¿POR QUÉ NO ES POSIBLE UTILIZAR SIMPLEMENTE 7 PARÁMETROS?

En sí mismo, el cambio de datum debería poder llevarse acabo mediante traslación, rotación y cambio de escala. Las transformaciones descritas anteriormente se basan en esta característica. Sin embargo, la materialización de la realidad terreno en cada caso provoca ligeros cambios de forma a lo largo de la red por el uso de métodos de medida distintos, criterios de ajuste, errores de medida etc; este hecho no puede ser por tanto modelado mediante una simple transformación conforme.

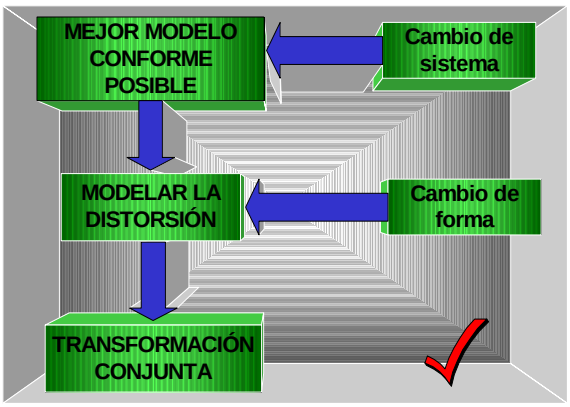



*Figura 2.-* Polinomios real y complejo (figura derecha

Uno de los procedimientos ya ensayados por otros países consiste en los siguientes pasos esenciales:

- Calcular la mejor transformación conforme posible entre los dos datums, esto eliminaría la diferencia entre los mismos debida únicamente al cambio de Sistema Geodésico de Referencia pero no tendría en cuenta el cambio de forma.
- Obtener las diferencias entre el valor en el datum de llegada y el calculado a partir de esta transformación conforme. Éstas representan la distorsión.
- Modelar la distorsión.
- Obtener la transformación conjunta "conformidad+modelo de distorsión"

La posibilidad de modelar la distorsión se basa en la existencia de un patrón regular de comportamiento ya que aquella no presenta aleatoriedad sino una cierta correlación espacial.

La forma de modelar esta distorsión ha sido llevada a cabo por otros autores mediante tres técnicas: a)Superficies de mínima curvatura (MCS) b)Colocación mínimo cuadrática (LSC) y c) Regresión múltiple (MRE)

En la *Figura 5* se pone de manifiesto la comparación de ambos métodos para las zonas de test. Con un criterio puramente numérico el mejor de los métodos es el de mínima curvatura que ha servido de modelo para la transformación de NAD27 a NAD83 en EEUU. La colocación mínimo cuadrática tiene similar bondad, con la ventaja de permitir estimar en cada punto el error que se está cometiendo al aplicar esta transformación. Además, resulta más versátil si la densidad de puntos es irregular, permitiendo el recálculo de la malla sin necesidad de introducir todos los puntos de nuevo. Este método de colocación (LSC) ha sido el elegido en países como Australia o Canadá.

El método de mínima curvatura fue inicialmente desarrollado por Briggs (1974), se basa en minimizar la curvatura total sobre una rejilla creada a partir de una distribución discreta de puntos. La idea proviene de la ingeniería mecánica y la teoría de la elasticidad. Consiste en considerar una lámina en equilibrio donde las fuerzas actúan perpendiculares a ella y no existen ni fuerzas de cizalla ni tensiones en la misma. Las fuerzas actuantes sobre esta lámina corresponderían a los puntos REGENTE de la red, en concreto a la distorsión de la red en esos puntos. La deformación en la lámina es descrita mediante la ecuación biarmónica siguiente:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \qquad (1)$$

$D$ se conoce como la rigidez a la flexión, $P$ la fuerza y $w$ el desplazamiento, siendo $P$=0 para los puntos que no sean dato. El resultado de la ecuación anterior, junto con la condición de continuidad hasta la segunda derivada, proporciona un polinomio de tercer orden en el que las fuerzas actuantes resultan de la fuerza en el punto, $u(x_i,y_i)=w_i$. Las condiciones de contorno en nuestro caso son especialmente importantes dado puede existir una muy pequeña franja de terreno entre la línea de costa y los vértices próximos a ella. Con este método se asegura que no exista fuerza alguna entre el límite de los puntos dato y el borde de la rejilla, es decir, en los bordes se tiene una tendencia lineal y, en las filas y columnas límite la fuerza y el momento de plegado serán cero.

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

De la ecuación biharmónica anterior se deducen las 6 ecuaciones en diferencias finitas para los puntos de la malla que, resueltas iterativamente dan lugar a la superficie, por ejemplo, para los puntos centrales de la rejilla se utiliza la ecuación siguiente

$$u_{i+2,j}+u_{i,j+2}+u_{i+2,j}+u_{i,j+2}+u_{i-2,j}+u_{i,j-2}$$
$$+2(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})$$
$$-8(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+20u_{i,j}=0$$

La transformación empleando superficies de mínima curvatura muestra el mejor grado de ajuste como cabía esperar siendo especialmente favorable para transformar escalas grandes. Se ha generado una malla de 105" de paso que se puede observar en la Figura 3, la cual, representa la componente este de la distorsión. Para crear esta malla se ha calculado una transformación de 7 parámetros nueva para toda la península sin hacer distinción de zonas. El sistema de transformación mediante rejilla ha sido el elegido por canadienses, australianos, norteamericanos etc. Los dos primeros emplearon método de colocación y EEUU mínima curvatura. Para realizar todos los cálculos, transformaciones, cambios de formato y test se han desarrollado herramientas específicas en Matlab 6.5, una captura de pantalla de una de las herramientas se puede ver en la Figura 8

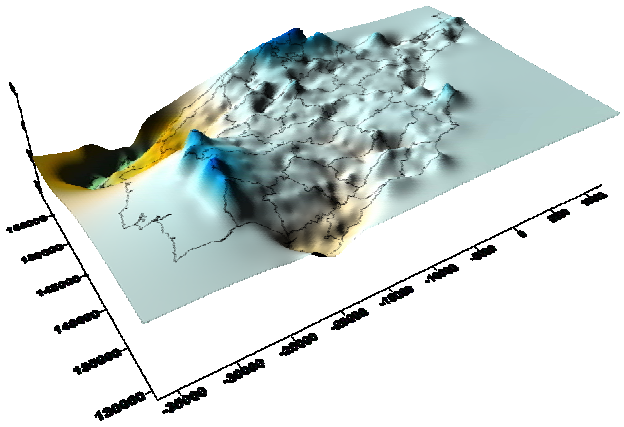


*Figura 3.*- Distorsión en longitud

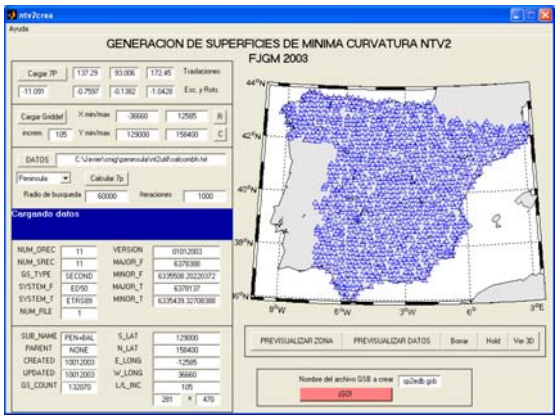



*Figura 4.*- Herramientas desarrolladas

Rubber-sheeting consiste en encontrar una transformación entre las dos figuras de la red en distintos datums de manera que sean topológicamente equivalentes. La forma más adecuada de identificar las figuras de ambas redes es mediante una triangulación de Delaunay y determinar un homomorfismo lineal por partes. La forma más común consiste en obtener los parámetros de una transformación afín para cada triángulo y derivar de esta descomposición del espacio una rejilla. Este método ha sido el elegido por Gran Bretaña y Suiza.

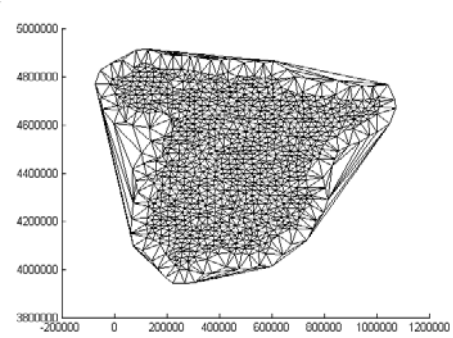



*Figura 4.*- Rubber-Sheeting

En la Figura 4 se puede observar la triangulación de Delaunay de REGENTE a la que se ha añadido "puntos virtuales" cuyo vector ED50-ETRS89 se ha obtenido por transformación lineal de los más cercanos. El propósito de estos "puntos virtuales" es evitar triángulos demasiado alargados cerca de la línea de la costa. Para cada triángulo así formado se ha calculado una transformación del tipo siguiente, no existiendo residuo alguno en esta transformación.

$$\begin{bmatrix} x_{ETRS89} \\ y_{ETRS89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x \cos\alpha_x & \mu_y \cos\alpha_y \\ \mu_x \sin\alpha_x & \mu_y \cos\alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ED50} \\ y_{ED50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

El modelo común mínimo cuadrático se ve ampliado a $Ax+s+n=K$ donde: $A$ es la matriz de diseño, $x$ los parámetros, $K$ los términos independientes, $s$ representa la señal y $n$ el ruido, estas últimas variables aleatorias. La colocación mínimo cuadrática tiene por objeto la determinación de los parámetros $x$ del ajuste, la eliminación del ruido mediante filtrado y el cálculo de la señal en otros puntos que no hayan intervenido en el ajuste, esto último es especialmente útil para nuestros propósitos. En nuestro caso $Ax$ representa la fórmula de transformación conforme, $s$ las distorsiones residuales y $n$ el efecto de los errores de medida. Dado una serie de puntos n con señal conocida ($\Delta\lambda$ $\Delta\varphi$), es posible predecir en un punto $P$ los valores de señal $\Delta\lambda_P$ $\Delta\varphi_P$ mediante el siguiente algoritmo de predicción:

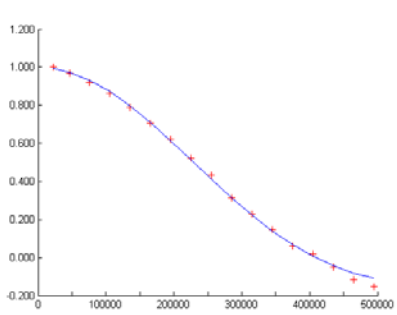



*Figura 4.*-Función covarianza de la longitud

$$\Delta\lambda_P = C_I C_D^{-1} \Delta\lambda$$

con

$$C_I = \begin{pmatrix} C(d_{P1}) & \dots & C(d_{Pn}) \end{pmatrix}$$

**y**

$$C_D = \begin{pmatrix} C(d_{11}) & C(d_{12}) & \dots & C(d_{1n}) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ C(d_{n1}) & C(d_{n2}) & \dots & C(d_{nn}) \end{pmatrix}$$

donde $C_D$ es la matriz covarianza de la señal más el ruido y $C_I$ es la matriz covarianza de la señal entre el punto $P$ y los restantes puntos, por último $\Delta\lambda$ corresponde a la distorsión de la red en los puntos conocidos.

$$\Delta\lambda = \begin{pmatrix} \Delta\lambda_1 & \Delta\lambda_2 & \dots & \Delta\lambda_n \end{pmatrix}^T$$

La función covarianza $C$ es determinada empíricamente y, como se puede ver en la Figura 4 marcado con cruces, sigue aproximadamente una función Gaussiana. Sin embargo, se produce una covarianza negativa a partir de los 400Km por lo que es más adecuado considerar la función covarianza de Reilly que, aunque toma valores negativos raramente se utiliza esa zona de la función.

$$C(s) = C_0 (1 - \frac{1}{2}(s/d)^2) e^{-\frac{1}{2}(s/d)^2}$$

## 5. DETECCIÓN DE ERRORES.

La distinción entre error y distorsión de la red no es algo trivial. Como regla general se puede decir que es distorsión si los puntos del entorno de un vértice geodésico están afectados de un valor similar al punto que sea investigado. Como error se puede entender aquel cuyos valores distan mucho de los puntos de su entorno (spikes). Se han realizado muchos test empleando técnicas de tratamiento de imágenes sobre la malla creada, siendo los más significativos el *outlier index* , *diferencia mediana y las diferencias de cuarto orden*. En las dos figuras siguientes se puede apreciar los test de diferencia mediana (verde) y outlier index superpuestos. Se puede comprobar que ambos test convergen para valores claramente anómalos no siendo ninguno concluyente por si solo pero si complementarios.

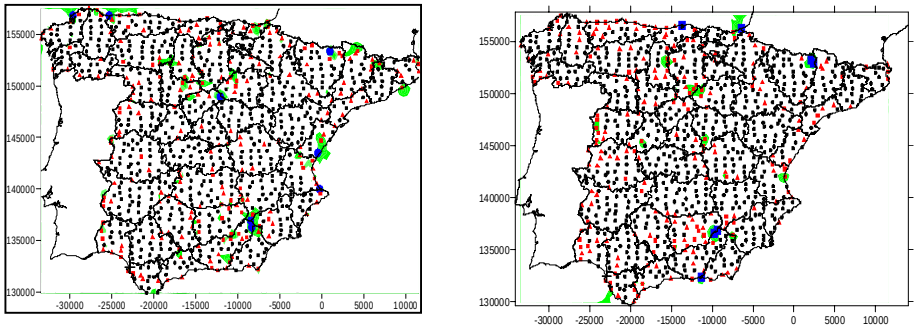



*Figura 5.*-Detección de errores groseros en longitud. A la derecha en latitud.

VIII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía
TOPCART 2004

Madrid, 19-22 Octubre 2004

El modelado de distorsión se configura como el mejor método para estimar las diferencias de datum en una red partiendo de un modelo creado a partir de un doble juego de coordenadas de menor densidad. Las distintas técnicas de creación de modelos de distorsión tienen resultados muy similares (González-Matesanz 2003) tanto en la parte de ajuste a los puntos dato, como en los puntos a estimar. El método elegido (MCS) permite un buen equilibrio entre estimación y extrapolación de valores; sus resultados mostrados en las tablas anteriores, para puntos totalmente independientes de los que han servido para crear el modelo, permiten transformar cualquier producto cartográfico o SIG con una calidad suficiente.

## 6. ZONAS EXTERNAS DE TEST.

Para comprobar la bondad de las transformaciones con modelado de distorsión se ha recalculado la red geodésica correspondiente a un conjunto de vértices en la zona de Castilla La Mancha empleando vértices REGENTE de coordenadas ETRS89, como ya se ha explicado, como puntos fuertemente constreñidos y, añadiendo en el ajuste observaciones terrestres de la red de orden inferior (ROI) para unos 1500 puntos. El resultado ha sido de nuevo un conjunto doble de coordenadas ETRS89 y ED50.

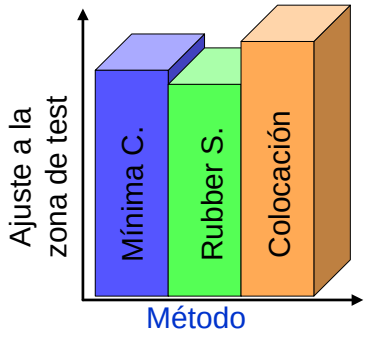



*Figura 5.-* Bondad de los distintos métodos

Las coordenadas ED50 de la base de datos para estos vértices se han transfomado mediante mínima curvatura, colocación y rubber-sheeting (en todos los métodos se ha empleado únicamente los puntos de la figura 1 para generar el modelo de distorsión), los resultados se han comparado con las coordenadas ETRS89 del nuevo ajuste. En la *Figura 6* se pueden observar en azul los puntos cuyo residuo es inferior a 25cm para mínima curvatura. Los puntos de mayor diferencia corresponden a valores de frontera de límite provincial y está relacionado con el método de compensación por provincias de ED50.

| | MCS | | LSC | | RS | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estadísticas** | **E $_{TEST}$** | **N $_{TEST}$** | **E $_{TEST}$** | **N $_{TEST}$** | **E $_{TEST}$** | **N $_{TEST}$** |
| **# puntos** | 1400 | 1400 | 1400 | 1400 | 1395 | 1395 |
| **Media** | 0.00 | -0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | -0.00 |
| **Std Dev** | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 |
| **Max** | 0.24 | 0.19 | 0.24 | 0.22 | 0.23 | 0.22 |
| **Min** | -0.25 | -0.25 | -0.24 | -0.24 | -0.24 | -0.24 |
| **Rango** | 0.49 | 0.43 | 0.48 | 0.46 | 0.48 | 0.46 |
| **95%** | 0.13 | 0.11 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.09 |
| **99%** | 0.16 | 0.13 | 0.13 | 0.12 | 0.13 | 0.12 |

*Tabla 3.-* Test sobre puntos externos de los distintos modelos de distorsión: MCS (Superficies de mínima curvatura), LSC (Colocación mínimo cuadrática), RS (Rubber-sheeting). Test de Castilla la Mancha.

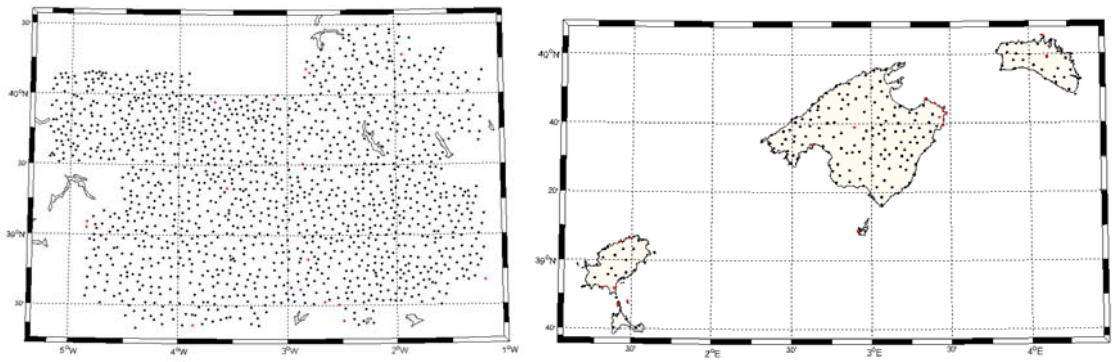


*Figura 6.-*Zonas de test

## 7. CONCLUSIONES.

Se han realizado distintos test, además de las zonas indicadas anteriormente, en la Comunidad Valenciana (datos ICV) y Cataluña, mostrando resultados análogos y que permiten cifrar la bondad de la transformación mediante modelado de distorsión en aproximadamente 10-15 centímetros al 95% de fiabilidad. En resumidas cuentas, no existe forma de transformar una gran red de ámbito nacional mediante una transformación matemática simple, como 7 parámetros o polinomios, si deseamos aplicarla a escalas grandes existe una componente de distorsión difícil de absorber. La solución de modelado de distorsión ya sea mínima curvatura, colocación o rubber sheeting es el método más adecuado ya que estamos modelando los residuos de una primera transformación anterior conforme. Los tres métodos dan resultados excelentes si bien, mínima curvatura se adapta ligeramente mejor. El formato de rejilla NTV2, en el que finalmente se distribuye la transformación final, adoptado por australianos y canadienses permite múltiples rejillas jerarquizadas lo que hace posible ir añadiendo transformaciones más localizadas dentro de la rejilla principal así como la indiscutible ventaja de estar implementado en multitud de softwares comerciales.

## 8. REFERENCIAS.

Autor I (2000): "La Cartografía en siglo XXI". VII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía, pág. 34-40.
Appelbaum L.T. "Geodetic datum transformation by multiple regression equations" (1982) Proceedings of the 3rd International Symposium on Satellite Doppler, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, 207-203
Ardizone, J.A. "Análisis de datos aeromagnéticos. Metodologías y aplicación al levantamiento aeromagnético de España peninsular" (1998). Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento. 228pp
Briggs, I.C. "Machine contouring using minimum curvature" (1974) Geophysics, 39-48
Collier P, Argeseanu, V.S., Leahy F.J. "Distorsion modelling and the transition to GDA94" (1998)The Australian surveyor 43-1. 29-40
Collier, P. "Reactions to the new geocentric datum of Australia" (1997) The trans tasmanian surveyor. Vol1, 35-44
Collier,P. "Transition to the geocentric datum of Australia" (1996) Consultants report to the office of surveyor general, Victoria 91pp
Dalda, A. "DGPS y levantamientos topográficos. Su empleo en actualización del Mapa Topográfico Nacional" (1997). Mapping nº38.
Dalda, A. "Parámetros de transformación entre sistemas de referencia terrestre", (2000), Instituto Geográfico Nacional, reporte interno.
Dewhurst, W.T. "The application of minimum curvature-derived surfaces in the transform of positional data from the Norh American datum of 1927 to the Norh American Datum of 1983" (1990) NOAA Technical Memorandum 30pp
Draper,N.R. Smidth, H. "Applied regression analysis" (1981). Wiley
Featherstone, W.E. "A comparison of existin co-ordinate transformation models and parameters in Australia"
García de Arangoa, A. "Elasticidad teorica" segunda edición. Instituto Geográfico Nacional.
González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A.. Development of the ED50-ETRS89 transition. Euref Symposium. Ponta Delgada,Azores.2002
González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A.. Estrategias para la transición ED50-ETRS89. 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica.2002
González-Matesanz, F.J., Quiros, R., Celada, J., Sobrino, J.A. ,Dalda, A., "Predicción de diferencias entre ED50 y ETRS89.". 4ª Asemblea Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofisica. Figueira da Foz 2004
González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A., Celada, J. "Ed50-Etrs89 Transition Models For The Spanish Geodetic Network". EUREF 2003 Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF). Program and Abstracts. 2003
González-Matesanz, F.J., Dalda-Mourón, A. "Modelos De Transformación Entre Ed50 Y Etrs89". 5ª Setmana Geomàtica de Barcelona. Program and Abstracts. 2003
González-Matesanz, F.J. "Grid estimation. Aplication to datum distortion modelling". European Commission. Joint Research Centre. Institute for Environment and Sustainability. First Workshop on European Reference Grids. EuroGrid-2003
Greaves, M., Cruddace, P. "The adoption of ETRS89 as the National Mapping System for GB, via a Permanent GPS Network and Definitive Transformation". EUREF Symposium 2001.
Lachapelle, G. "Least Squares predictions of horizontal coordinate distorsions in Canada". Bulletin Geodesique 56 242-257
Love, A.E.H. "A treatise on the mathematiccal theory of elasticity" fourth edition. Dover publications
Moritz H. Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe.1980
Peña, D. "Estadística, modelos y métodos. 2. Modelos lineales y series temporales" (1999) Alianza Universidad. 745pp
Regidor Gutierrez, J. "El proyecto REGENTE" (2000). VII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía. 87-93. 2000.
Saalfeld, A. "A fast Rubber-Sheeting transformation using simplicial coordinates". The American Cartographer. Vol 12. 169-173. 1985
Snyder, P.J. "Computer Assisted Map Projection Research" (1985) U.S Geological Survey. 157pp
Swain, C.J. "A Fortran IV program for interpolating irregulary spaced data using the difference equations for minimum curvature". Computers & Geosciences. Vol 1 231-240.
White, M.S.,Griffin, P. "Piecewise Linear Rubber-Sheet Map Transformation". The American Cartographer. Vol 12. 123-131. 1985