Documento descargado de
ftp://ftp.geodesia.ign.es/documentos/
EL_NUEVO_MODELO_DE_GEOIDE_PARA_ESPA_A_EGM08-REDNAP.pdf

EL NUEVO MODELO DE GEOIDE PARA ESPAÑA EGM08 - REDNAP

Centro de Observaciones Geodésicas
Subdirección General de Astronomía, Geodesia y Geofísica
Instituto Geográfico Nacional

RESUMEN

La obtención de altitudes ortométricas derivadas de técnicas GNSS exige apoyarse en una serie de puntos con altitud ortométrica bien conocida y realizar un modelo local para interpolar o bien disponer de un modelo de geoide con la suficiente precisión. Sin embargo, para utilizar los modelos gravimétricos, estos deben ser previamente adaptados al datum vertical existente. En este artículo se resumen los trabajos realizados para adaptar el modelo gravimétrico mundial más reciente, EGM2008, al Sistema de Referencia Vertical en España materializado por la Red de Nivelación de Alta Precisión (REDNAP). En este sentido se ha construido una superficie de corrección mediante el algortimo de mínima curvatura utilizando el doble juego de altitudes (ortométrica y elipsoidal) de unas 13700 señales REDNAP. Finalmente se ha estimado una precisión final absoluta en el modelo de 3.8 cm comprobada sobre puntos distantes que no han sido utilizados en un primer cálculo y una precisión relativa del orden de 2 partes por millón.

SUMMARY

Obtaining orthometric heights derived from GNSS techiques require to use a serie of points with well known orthometric altitude and perform a local model to interpolate or to have a geoid model with the required precision.However, to use gravity models, they must first be adapted to existing vertical datum. This article summarizes the work done in order to adapt the most recent world gravity model EGM2008 to the Vertical Reference System in Spain materialized by the High Precision Levelling Network (REDNAP). In this sense a surface correction has been computed by the minimum curvature algorithm using the double set of elevations (orthometric and ellipsoidal heights) of about 13700 REDNAP benchmarks. Finally, it has been estimated an absolute accuracy of 3.8 cm tested in the final model on distant points that have not been used in a first estimation and a relative accuracy of about 2 parts per million.

1. INTRODUCCIÓN.

Actualmente, con las técnicas GNSS es fácil obtener coordenadas con precisión suficiente para todo tipo de aplicaciones geodésicas y topográficas incluso trabajando a distancias relativamente grandes. La red geodésica de estaciones permanentes (ERGNSS) y la Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales (REGENTE) proporcionan un marco homogéneo y preciso para la geodesia nacional en el nuevo sistema European Terrestrial Reference System 89 (ETRS89). Asimismo, la mayor parte de las Comunidades Autónomas han desplegado redes de estaciones permanentes GNSS en su territorio con coordenadas en un sistema de referencia absolutamente compatible con los marcos de las redes nacionales del Instituto Geográfico Nacional y con la suficiente densidad de estaciones como para poder ofrecer a los usuarios correcciones diferenciales de fase, de tal forma que estos pueden obtener precisiones de unos pocos centímetros en tiempo real.

Según el Real Decreto 1071/2007 para el cambio de sistema geodésico de referencia en España, ETRS89 y REGCAN95 son los nuevos marcos en los que se debe compilar toda la información geodésica, topográfica y cartográfica. Asimismo, en el Artículo 4, se establece que *"el Sistema de Referencia Altimétrico tomará como referencia el nivel medio del mar Mediterráneo en Alicante para la península y las respectivas referencias mareográficas locales para el resto de los territorios. En todos los casos, el sistema altimétrico queda materializado por la nueva Red Española de Nivelación de Alta Precisión (REDNAP) con altitudes ortométricas Helmert (H)".*

Tanto la red de estaciones permanentes ERGNSS como REGENTE tienen altitudes elipsoidales (h) sobre ETRS89 bien determinadas y por tanto el usuario también puede calcular altitudes sobre el elipsoide con sistemas GNSS. Sin embargo, el problema surge a la hora de transformar estas altitudes elipsoidales en altitudes ortométricas, que, obviamente, tienen una aplicación más práctica en topografía y cartografía.

La relación entre ambas es bien conocida por todos, denominada ondulación del geoide, o separación entre geoide y elipsoide en un punto tomada sobre la normal al geoide.

A partir de la figura 1 se puede aproximar (las normales al geoide y al elipsoide no son coplanarias debido a la curvatura de la línea de la plomada respecto a la normal al elipsoide) y obtener la relación entre ambas altitudes:

$$N = h - H$$

En el caso de España, N es siempre positiva con respecto al elipsoide de referencia SGR80 usado en ETRS89, si bien en todo el globo adquiere valores positivos o negativos que en general no superan los 100 m (figura 2).

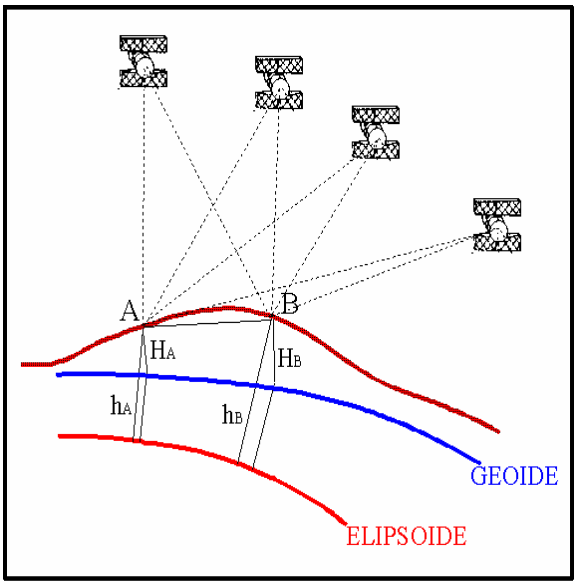


Fig. 1. Relación entre geoide y elipsoide.

Cuando la distancia entre los puntos en la zona de trabajo es pequeña, se puede asumir que el incremento de altitud elipsoidal es semejante al incremento de altitud ortométrica y por tanto se podría considerar que las superficies del geoide y del elipsoide son casi paralelas, o lo que es lo mismo, existe la misma ondulación media del geoide en el área considerada.

Sin embargo, cuando se trabaja con GPS en zonas más extensas, esta hipótesis no es asumible en ningún caso y el conocimiento de la ondulación del geoide se hace imprescindible. Incluso trabajando en zonas pequeñas pueden existir diferencias de ondulación que hacen imposible para las precisiones exigidas el asumir una ondulación del geoide similar para todos los puntos. Por ejemplo, en el Valle del Guadalquivir se pueden dar diferencias de ondulación del orden de 1 metro en menos de 10 km de distancia. Incluso mayores gradientes pueden enconrarse en Canarias, sobre todo en las islas de mayor relieve.

Es por tanto imprescindible cuando se trabaja con GNSS disponer de un modelo de geoide con la suficiente precisión relativa para convertir incrementos de altitud elipsoidal en incrementos de altitud ortométrica, ya que la altimetría que se obtiene, por principio, es sólo la elipsoidal.

Ahora bien, los modelos de geoide gravimétricos raramente se ajustan de manera exacta con la superficie de referencia vertical legal en cualquier país. Este ajuste debe hacerse con puntos de la red de nivelación de precisión en los que además de la altitud ortométrica, se haya observado la altitud elipsoidal mediante GPS. De esta forma que se tendrán dos estimaciones del modelo geoidal (Featherstone, 1998):

1. Un modelo de geoide puramente gravimétrico, para su uso en geodesia, oceanografía y geofísica (Vanicek et al, 1994), definido como una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre (W_0 = constante) y que sensiblemente coincide con el nivel medio de los oceános a escala global.

2. Un conjunto discreto de ondulaciones como separación entre la superficie de referencia vertical legal y el elipsoide WGS84, cuyo uso queda restringido a la conversión directa de altitudes GPS a ortométricas referidas a dicha superficie. Este segundo modelo ya no debería llamarse estrictamente un modelo de geoide, ya que pierde la condición de superficie de referencia equipotencial, pero sí permite correlacionarlo con el modelo gravimétrico para obtener una solución más ajustada entre unas observaciones y otras.

En teoría, el segundo modelo, si está construido sobre la base de una superficie de referencia con altitudes ortométricas, no debería perder la condición de potencial W_0 = constante, ya que estas altitudes están derivadas de cotas geopotenciales.

La solución del modelo de geoide gravimétrico proporciona una detallada información, pero presenta deficiencias en las longitudes de onda largas (Sideris y She, 1995). Por el contrario, la combinación GPS y nivelación tiene una precisión relativamente homogénea y es más real a largas distancias, por lo que esta fuente de datos proporcionará una superficie donde el GPS definirá el control vertical en las longitudes de onda largas mientras las ondulaciones de longitudes de onda medias y cortas se obtienen con la ayuda del modelo de geoide gravimétrico, especialmente en regiones donde no existen datos GPS y en el presente caso, a distancias relativamente alejados de las líneas de nivelación REDNAP.

2. EL NUEVO MODELO GEOPOTENCIAL EGM2008.

En España, el primer modelo de geoide gravimétrico con suficiente precisión fue IBERGEO95 (M. Sevilla), publicado en 1995. Este modelo fue escalado y llevado al sistema de referencia vertical de España mediante unos 200 puntos dobles de la antigua Red de Nivelación de Alta Precisión (RNAP), en los cuales se había hecho observación GPS durante la campaña REGENTE.

Desde entonces han aparecido nuevos modelos de geopotencial mucho más precisos, nuevos modelos digitales del terreno para las correcciones topográficas, sobre todo en zonas marinas y más datos de anomalías de gravedad.

En 2006 el mismo autor publicó un modelo más preciso teniendo en cuenta estas variables denominado IBERGEO 2006 (Sevilla, M.J., 2006), realizado con más de 200.000 datos de gravedad y a partir del modelo geopotencial EIGEN-CG03C publicado por el GeoForschungsZentrum de Potsdam (GFZ), con datos obtenidos de la misión CHAMP. El modelo geopotencial usado corresponde a un desarrollo en armónicos esféricos completo hasta grado y orden 360.

En 2005, V. Corchete (Universidad de Almería) publicó también un modelo gravimétrico (IGG2005), basado en el modelo geopotencial EIGEN-CG01C de la misión CHAMP, con datos gravimétricos de casi 180.000 puntos procedentes del National Geophysical Data Center (NGDC), Bureau Gravimetrique International (BGI) y el United States Geological Survey (USGS) y datos altimétricos de STRM90M (Modelo digital del terreno a escala global de 90 m de resolución).

En 2008, un nuevo modelo geopotencial ha sido publicado por el National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) EGM Development Team, el Earth Gravitational Model 2008, EGM2008 (Pavlis et al, 2008). Este modelo gravitacional (figuras 2 y 3) es un desarrollo completo en armónicos esféricos hasta grado y orden 2159 y contiene coeficientes adicionales extendidos hasta grado 2190 y orden

2159 (www.nga.mil), lo cual implica que registra el campo gravitatorio hasta aproximadamente 20 km de longitud de onda. Este modelo ha sido elaborado con anomalías de gravedad a partir de una rejilla de 5' x 5', cuyos datos proceden de diferentes fuentes, sobre todo misiones altimétricas (GRACE). Información más detallada puede encontrarse en:
http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html

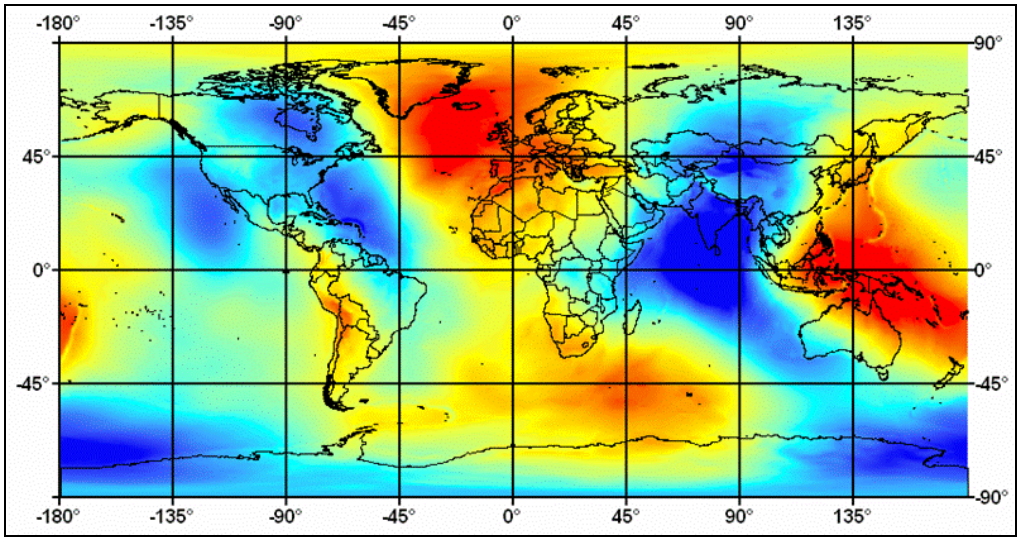


Figura 2. Modelo mundial EGM2008 (Fuente: http://earth-info.nga.mil)

EGM2008 es el modelo a escala mundial más completo y preciso obtenido hasta el momento. Está disponible en forma de malla de 1' x 1' y de 2.5' x 2.5', incluso en formato GIS de ESRI, con valores de ondulación sobre WGS84. Un test con datos GPS/nivelación de más de 12.000 puntos a nivel global ha demostrado que la precisión de EGM2008 en desviación estandar se encuentra en el orden del decímetro y mucho mejor en precisión relativa, mejorando con mucho los modelos globales que había hasta el momento (se prevé que la misión GOCE aporte datos aún más completos y fiables). Estos errores están computados a nivel global, por lo que sería necesario una estimación más precisa en una determinada zona con otros datos independientes.

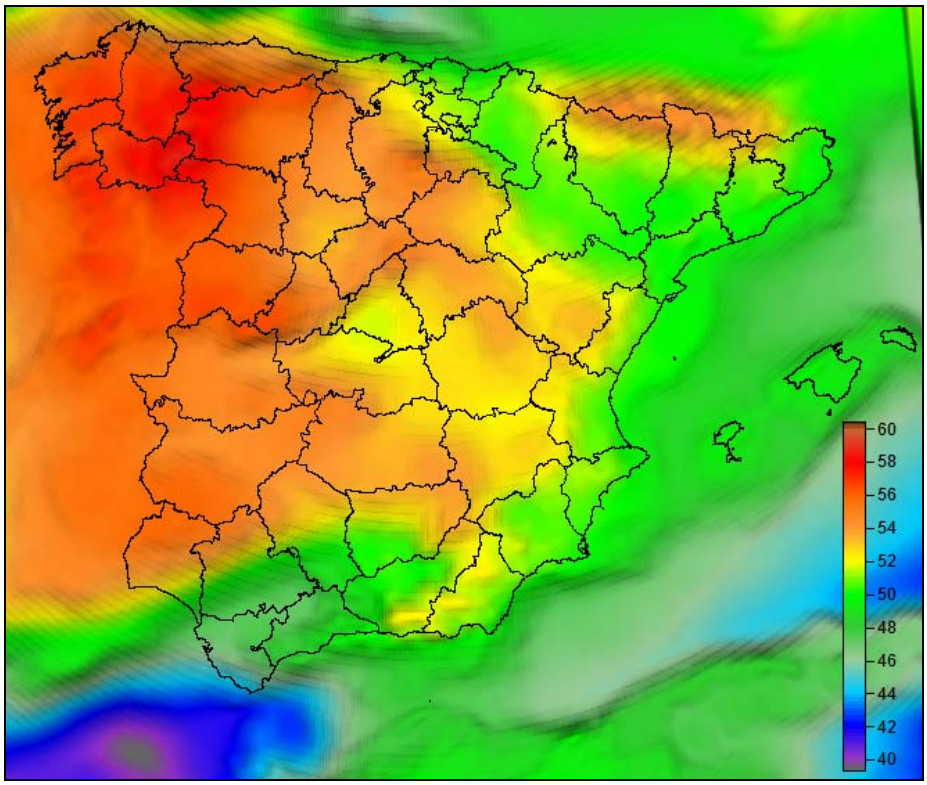


Fig. 3. EGM 2008 en Península y Baleares.

Una comparación similar ha sido realizada recientemente en la Comunidad Valenciana utilizando 223 señales REDNAP con los modelos geopotenciales EGM96 y EIGEN-CG03C, así como con los modelos de geoide EGG97, IGG05, IBERGEO2006 y GCV07 (Martín, A. et al 2008), con resultados muy parecidos en cuanto a desviación estándar (0.106 m).

3. ADAPTACIÓN DE EGM2008 AL SISTEMA DE REFERENCIA VERTICAL EN ESPAÑA.

3.1. El proyecto REDNAP.

El proyecto REDNAP (Red Española de Nivelación de Alta Precisión) constituye la nueva red altimétrica de España, realizada entre los años 2000 y 2008. Está constituida por unas 25.000 señales dispuestos a lo largo de líneas, con una separación media entre los puntos de 1000 metros, configurando una red de unos 18000 kilómetros. La red ha sido observada con técnicas de nivelación de alta precisión en cuanto a la medición de desniveles geométricos, según unas estrictas prescripciones. Se han realizado medidas de gravedad con gravímetros Lacoste & Romberg partiendo de bases cercanas con itinerarios cerrados para ajuste de la deriva instrumental. Como bases gravimétricas se han utilizado los puntos de la Red de Bases (122 puntos, incluida la Base de calibración) y densificada con 137 puntos más, Bases Auxiliares, incluidos 21 puntos observados con el gravímetro de absolutas A10.

Desde 2008 se están llevando a cabo campañas de densificación de REDNAP, con 34 nuevas líneas (unos 3200 km más) con el objetivo de que ningún polígono supere los 400 km de perímetro (proyecto ampliación REDNAP).

La compensación la red se ha realizado en cotas geopotenciales, como red libre, apoyada en el punto origen NP1 (Alicante), obteniéndose las altitudes ortométricas en función del resultado de geopotenciales, con unos vectores de error máximos en el ajuste (95% confianza) de 8 cm en las

zonas más alejadas de NP1 (Galicia y Gerona), con una precisión relativa media de 0.16 ppm (Barbadillo, A. et al, 2008).

De acuerdo con la tendencia actual en la definición de datums verticales en todo el mundo, el ajuste podría hacerse fijando las estaciones mareográficas con datos de nivel medio disponibles en toda la península, pero la diferencia entre el Mediterráneo y el Cantábrico hace que se tenga que deformar la red. La última diferencia medida entre el mareógrafo de Alicante y el de La Coruña medida a través de REDNAP es de 0.287 m (con una elipse de error 95% de confianza en Coruña inferior a 8 cm).

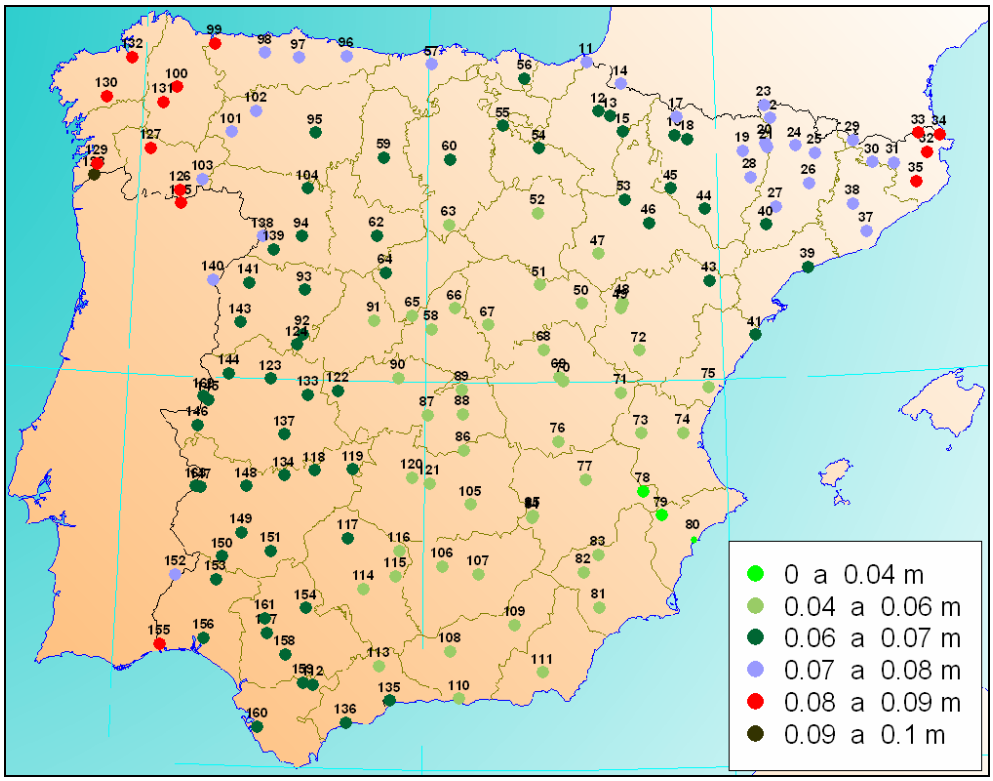


Fig. 4. Nodos REDNAP y vectores de error resultantes del ajuste (95% confianza).

Después de realizar una comparación detallada en puntos de GPS y nivelación de precisión con los modelos de geoide disponibles, se llegó a la conclusión que EGM2008 era el que mejor se adaptaba de manera relativa al Sistema de Referencia Vertical en Península y Baleares, materializado por la Red Española de Nivelación de Alta Precisión, aunque existe un "offset" o desplazamiento medio de 56,1 cm ($N_{EGM2008}$ - N_{REDNAP}), debido a la diferencia entre el potencial correspondiente al nivel medio del Mediterráneo en Alicante y el potencial W_0 adoptado por EGM2008. Este desplazamiento se calculó con los valores de ondulación de todas las señales válidas como valor medio de diferencia entre REDNAP y EGM2008.

Es necesario por tanto, para su uso práctico, la adaptación de EGM2008 a REDNAP, utilizando puntos con doble juego de altitudes (elipsoidal y ortométrico). La idea es ajustar la superficie de ondulaciones dada por un geoide gravimétrico (EGM2008) a las observaciones realizadas sobre REDNAP, de tal forma que el modelo resultante disponga de ondulaciones sobre el sistema de referencia materializado por el datum vertical en España. Como se ha dicho anteriormente, en sentido estricto, el modelo resultante es relativo a la que se podría llamar "Superficie de Referencia Vertical", pero desde el punto de vista práctico, es la superficie necesaria para convertir altitudes GPS en ortométricas.

Iniciativas semejantes han sido llevadas a cabo mediante la adaptación de geoides gravimétricos al datum vertical con datos GPS en las redes de nivelación en Estados Unidos: GEOID03 (Milbert,

1995) y GEOID09 (Roman et al, 2009), en Francia (Jiang y Duquenne, 1996), en Australia, AusGeoid98 (Featherstone et al, 2002 y Fotopoulos, G., 2002), Canadá (Fotopoulos, G. et al, 1999), Bélgica (Duquenne, H. et al, 2004), Alemania (Denker, H. et al, 1999), incluso para toda Europa (Denker, H. et al, 1998), etc. Estos son sólo unos ejemplos de los innumerables trabajos realizados en este sentido en todo el mundo.

3.2. Fuentes de datos.

Con la finalidad de dar coordenadas ETRS89 a las señales de REDNAP, en casi todas ellas se ha observado además GPS, utilizando como bases vértices geodésicos de la red REGENTE. El método de observación ha sido "estático rápido", siendo la distancia de las líneas base o distancia entre el vértice REGENTE y la señal REDNAP, por lo general, menor de 20 km. El tiempo medio de observación de cada señal fue de unos 10 minutos.

Las altitudes elipsoidales obtenidas adolecen de los defectos inherentes al método empleado, a la ubicación del punto –idónea para la red de nivelación pero en múltiples ocasiones inapropiada para observación GPS-, estacionamiento no estricto y a otras causas de error. Por esta razón, no todos los puntos REDNAP han sido observados con GPS. No en todos aquellos donde se ha intentado la observación GPS, el resultado ha sido satisfactorio (por ejemplo, señales de nivelación empotradas en edificios con un horizonte muy limitado). Salvadas estas puntualizaciones, se puede afirmar que se dispone de un número considerable de observaciones que permiten una estimación de la ondulación del geoide por diferencia entre la altitud ortométrica y la altitud elipsoidal así obtenidas.

Por otro lado, el Instituto Cartográfico de Cataluña (ICC), también observó casi 300 puntos REDNAP en RTK utilizando su red de estaciones permanentes GNSS. Con estas observaciones se ha podido realizar una contrastación con los datos observados por el IGN en estático rápido desde REGENTE y así verificar su concordancia, facilitando la depuración de datos en esa región.

Recientemente se ha iniciado un proyecto de ampliación de REDNAP, pero la observación GPS ha seguido un criterio más estricto, cambiándose el estático rápido de 10 minutos por un estático de 30 minutos, eligiendo escrupulosamente aquellas señales con buenas condiciones para la observación GPS (buen estacionamiento, horizonte despejado, no multipath...). El estacionamiento en en estos casos ha sido mediante jalón de altura fija con nivel esférico sujetado mediante trípode con pinza, de tal forma que se garantiza de forma estricta la altura de antena sobre la señal. En lugar de observar todos los puntos, cada kilómetro, innecesario para la finalidad que nos ocupa, se observa una señal cada cinco, normalmente una señal principal. De esta forma se tienen a lo largo de la línea de nivelación coordenadas ETRS89 y altura elipsoidal cada cinco kilómetros, pero con una fiabilidad considerablemente mayor que en la observación estático rápido. La longitud de la líneabase sigue siendo como máximo de 20 kilómetros, con estación de referencia en un vértice REGENTE.

Por otro lado, la observación de REGENTE se realizó siempre en bloques de nueve vértices geodésicos y dos clavos de la antigua red de nivelación (RNAP) cercanos entre ellos y a uno de los nueve vértices del bloque, de tal forma que estas señales tenían doble juego de altitudes (elipsoidal y ortométrica), con la finalidad de transferir altitud ortométrica a uno de los vértices REGENTE del bloque. Precisamente estas señales son las que sirvieron para hacer el escalado de IBERGEO95, denominadas "apoyos de nivel de REGENTE".

De esta forma se contaba con unos 200 puntos dobles más con seis horas de observación GPS a menos de 5 km de un vértice REGENTE. El problema en este caso es que las señales de nivelación corresponden a la antigua red de nivelación de alta precisión, cuyo datum difiere ligeramente y en una cantidad variable espacialmente de la moderna REDNAP. En algunas zonas esta diferencia es de unos pocos centímetros, pero en otras, sobre todo en el norte, la diferencia llega hasta los 14 centímetros, por lo que, en principio, no se puede dar por válida la altitud ortométrica de estas señales. En un próximo proyecto se integrarán las líneas antiguas que aún tienen suficiente número de señales sin destruir, en la nueva REDNAP.

Sin embargo, existen muchas señales comunes entre una y otra red (unas 3.000), con lo cual para la mayoría de las señales de nivelación REGENTE se ha podido establecer una conexión entre la antigua y la nueva REDNAP, adoptando un valor de altitud ortométrica en estas señales referidas al

nuevo datum altimétrico. De esta forma, finalmente se han obtenido unos 125 puntos dobles válidos para el presente trabajo.

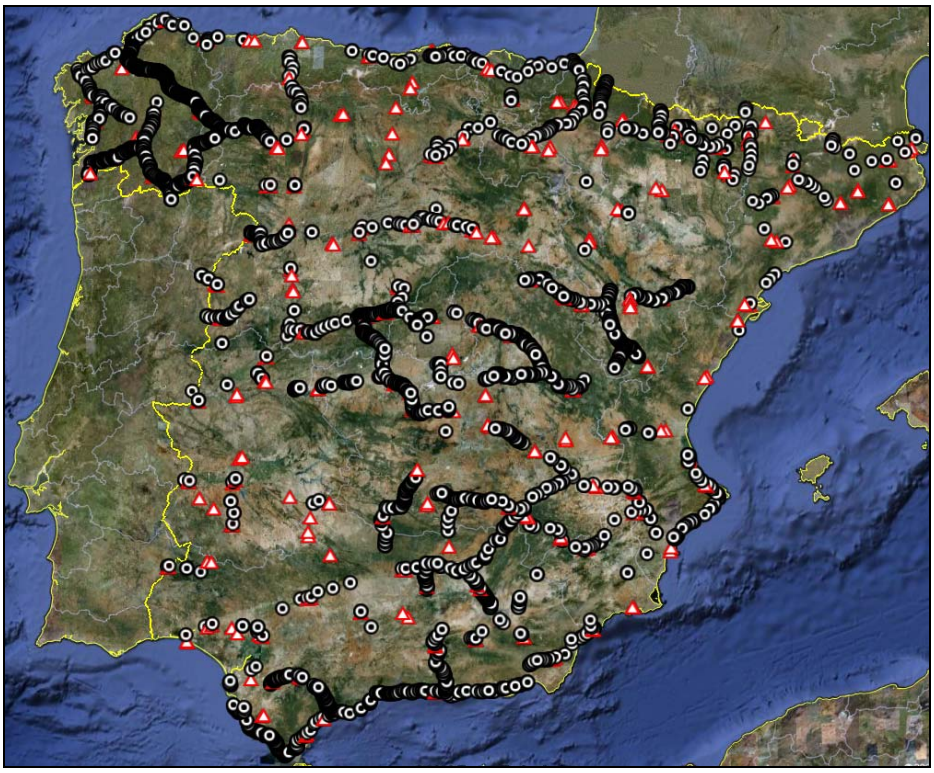


Fig. 5. Señales REDNAP antiguas y apoyos de nivel de REGENTE.

Otros datos que se han usado para construir la superficie de corrección a EGM2008 han sido los datos aportados de Portugal y Francia (por debajo del paralelo 44º) para el proyecto de densificación del European Unified Vertical Reference Network (EUVN_DA) de EUREF. Estos puntos pertenecen o están conectados a la red de nivelación de precisión de cada país y han sido escrupulosamente observados con GPS, de tal forma que estos datos han servido para establecer el EUVN (EVRS2000) y escalar el modelo de geoide europeo EGG97 (Kenyeres et al., 2006).

3.3. Depuración de los datos.

La aportación más numerosa la hacen los datos estático rápido de REDNAP, aunque también es cierto que, por numerosos motivos (escaso tiempo de observación, defectuoso estacionamiento en las señales, pobre horizonte GPS...), la precisión en estos puntos ha de ser necesariamente menor y por tanto es imprescindible la exhaustiva depuración de los datos y la evaluación de su calidad, tarea que ha sido sin duda la más costosa en tiempo, dado el gran volumen de datos, ya que se ha hecho estático-rápido en casi 17.000 señales.

Es obvio que el error que se pudiera tener en las señales es exclusivamente debido a la altitud elipsoidal observada con GPS, ya que el valor de altitud ortométrica está observado con nivelación de alta precisión (tolerancia $1.5\sqrt{k}$ mm), con nodos perfectamente compensados y en las que si hubiera algún error en la nivelación, hubiera sido detectado por diferentes métodos. Por lo tanto, la depuración se hizo siempre sobre la altitud elipsoidal.

Una primera depuración se hizo eliminando aquellos puntos en los que no fue posible resolver ambigüedades de fase (en L1 para lineasbase < 5 km y libre ionosfera para líneasbase > 5 km). En algo más de 500 señales no se pudieron resolver ambigüedades, por lo que la solución, a priori, tuvo que ser rechazada.

La segunda depuración se llevó a cabo analizando la tendencia en la ondulación del geoide entre señales consecutivas, ya que, salvo excepciones, el valor de ondulación observada (GPS-nivelación) debería seguir una tendencia uniforme entre señales que, normalmente, están separadas tan sólo un kilómetro, distancia en la que la variación de ondulación del geoide, debe ser bastante suave. Para analizar la idoneidad de una señal se observaron los valores de las señales anteriores y posteriores, elaborando gráficas con líneas de tendencia y eliminando aquellas señales con un sesgo superior a 0,08 m respecto a la tendencia marcada por las señales cercanas.

De esta forma se detectaron señales que si bien fueron resueltas las ambigüedades en el cálculo GPS, el horizonte era pobre por estar colocadas en sitios no despejados, con pocos satélites o bien el estacionamiento fue defectuoso o, sencillamente, el cálculo no fue satisfactorio por tiempo de observación insuficiente u otros motivos, como multipath no detectable en tan corto espacio de tiempo. Este sencillo y eficaz método permitió la eliminación de cerca de 2.000 señales "sospechosas". Aunque el método no es muy ortodoxo, es bastante práctico y funcional, ya que dada la proximidad entre señales consecutivas, permite fácilmente y de forma fiable detectar puntos erróneos dentro de un margen muy por debajo del decímetro, por lo que el conjunto de datos validados resulta ya de gran utilidad para los fines propuestos, aunque sería necesario seguir una depuración más refinada.

La tercera depuración, muy similar a la anterior, y en la que se pudieron refinar aún más los datos, consistió en observar en cada línea de nivelación las diferencias entre la ondulación observada y la ondulación dada por EGM2008 (aplicando el desplazamiento entre ambas superficies de 56.1 cm), de tal manera que la diferencia entre las dos superficies se modeló en cada línea de nivelación con un polinomio de grado 5 que se adapte a la tendencia. En una línea continua donde aproximadamente cada kilómetro (a veces más) se tiene la diferencia entre ondulación observada y ondulación del modelo, la variación de estas diferencias debería responder a una función suavizada, aunque a veces puede recoger irregularidades locales. Un salto de un dato respecto de esta función polinómica de tendencia indica que su altitud elipsoidal puede ser sospechosa, de tal manera que puede ser "razonablemente" eliminada.

Un cambio brusco en la línea de tendencia, siempre que esté justificado por varios datos, puede recoger una anomalía local del geoide, por lo que es necesario tener cuidado en la eliminación. En este sentido cabe decir que la calidad del modelo gravimétrico EGM2008 era tal que las diferencias en la mayor parte de los casos, como se verá posteriormente, no superaban el decímetro y la tendencia entre ambas superficies era prácticamente coincidente.

Con este criterio se eliminaron igualmente señales cuyo sesgo con respecto a la línea de tendencia era superior a 0,08 m.

El último criterio de validación de los datos fue mediante la validación cruzada de una superficie de mínima curvatura que se adaptara a los puntos. La técnica consiste en que para validar un punto cualquiera, se reconstruye la superficie de curvatura mínima sin tener en cuenta ese punto, y el valor resultante de la superficie se compara con el dato, de tal forma que se obtienen unos residuos. Lógicamente, y más con este juego de datos donde obviamente hay errores, aunque ya netamente más pequeños, es importante no forzar a que la superficie "pase" por los puntos.

De esta forma se obtuvieron los residuos de la validación cruzada para cada punto, de media cero (lógicamente, es un estimador insesgado) y se eliminaron aquellos puntos dato que "sobresalían" de la superficie calculada un valor absoluto de más de 6 cm, con lo que se eliminaron casi 400 puntos más. Una vez eliminados estos puntos, la desviación estándar resultante de los residuos de la validación cruzada fue de 2.6 cm, lo cual ya da una idea a priori de la calidad de los datos válidos utilizados.

Esta última depuración se realizó integrando ya todos los datos disponibles, aunque, obviamente, casi la totalidad de los datos eliminados fueron procedentes de la observación GPS estático rápido. El número de datos finalmente válidos puede verse en la Tabla 1.

En el caso de Canarias, los únicos datos disponibles y utilizados han sido las señales REDNAP con "fast static".

En resumen, los datos depurados válidos y utilizados han sido:

Tabla 1. Fuentes de datos utilizados.

Denominación	Puntos	Obs. GPS	Tiempo obs.	Long. lineabase
REDNAP	12.268	Fast Static	~ 10 min.	< 20 km
Ampliación REDNAP	164	Estático	30 min.	< 20 km
Apoyos niv. REGENTE	251	Estático	6 horas (2 sesiones)	< 5 km
REDNAP Canarias	963	Fast Static	~ 10 min.	< 20 km
EUVN_DA Portugal & Francia	55	Estático	Variable	Variable

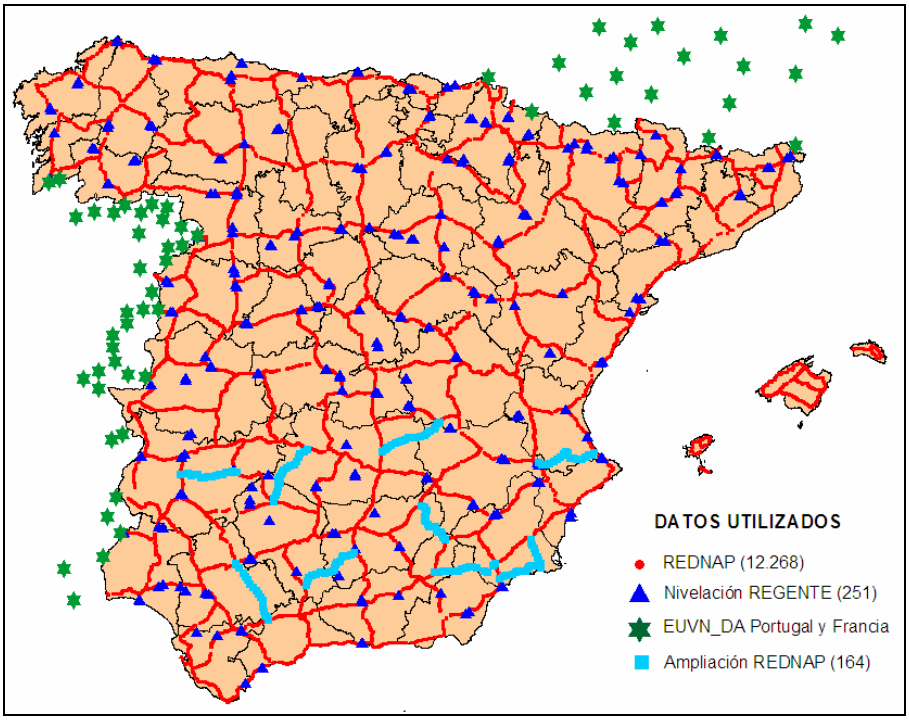


Fig. 6. Datos utilizados (Península y Baleares).

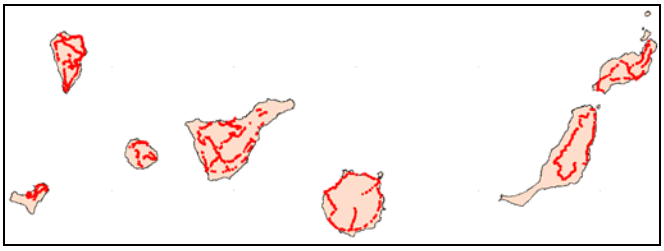


Fig. 7. Datos utilizados (Canarias).

Con estos datos, el objetivo es evaluar las diferencias entre las ondulaciones observadas y las obtenidas por el modelo EGM2008 (con el offset de 0.561 m). De esta forma se pudo construir una "superficie de correcciones" para sumar al modelo gravimétrico y obtener un modelo de geoide "corregido" por REDNAP y adaptado por tanto al datum vertical en España.

Los estadísticos para las diferencias evaluadas con los datos depurados en la península fueron:

Min: -0.225 m
Max: 0.193 m
Media: 0.000 m
Desv. estándar: 0.056 m

Como se puede ver en la desviación estándar de las diferencias de los puntos dato respecto a EGM2008, el ajuste del doble juego de altitudes REDNAP / GPS se encuentra por debajo de 0.1 m en el 93% de los puntos (fig. 8).

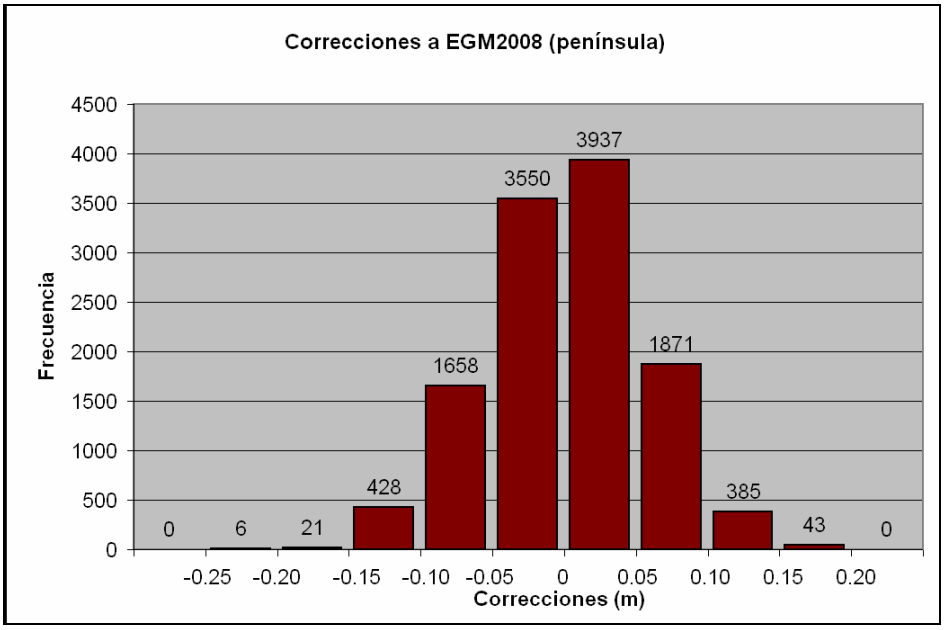


Fig. 8. Histograma de los valores de corrección a EGM2008 (península).

3.4. Calidad de los datos.

Dada la naturaleza de la mayor parte de los datos (estático rápido), es importante plantear cual es la precisión que van a tener estos datos y evaluar así la precisión final en la superficie de corrección de EGM2008.

La superficie de corrección pretende adaptar el modelo de geoide a la superficie de referencia vertical oficial en España (REDNAP), ya que es el "Datum" al cual se quiere referir el modelo de geoide resultante. En este hipotético caso, los posibles errores en la ondulación del geoide provienen de la altitud elipsoidal, que a su vez procede de REGENTE, ya que siempre se han adoptado como referencia los vértices de esta red para obtener la altitud elipsoidal. De esta forma, la superficie resultante (llamémosla EGM2008-REDNAP) está acorde con ambos marcos legales de referencia en altitud (REGENTE - REDNAP).

La desviación estándar resultante de la validación cruzada (2.6 cm) puede ser un buen indicador de la precisión en la altitud elipsoidal de los puntos dato, aunque podría considerarse optimista.

Por otro lado, se cuenta con 251 puntos con una altitud elipsoidal muy precisa (apoyos REGENTE), ya que son clavos de nivelación de la antigua Red de Nivelación de Alta Precisión que fueron

observados durante la campaña REGENTE en dos sesiones de tres horas cada una desde un vértice REGENTE situado siempre a menos de 5 kilómetros. Como se ha comentado anteriormente, estas señales tuvieron que ser referidas en altitud ortométrica al nuevo marco REDNAP para ser válidas. Algunas de estas señales pertenecen también a la nueva REDNAP, ya que entre la antigua red y la nueva hay unas 2.000 señales comunes. Además, concretamente en 52 señales REDNAP que habían sido apoyos de nivelación REGENTE (6 horas de observación GPS con línea-base < 5 km) se había observado GPS estático rápido en REDNAP. Así, la comparación de la altitud elipsoidal REGENTE y la altitud elipsoidal de estático rápido proporciona una excelente manera de evaluación de calidad de los datos.

La comparación entre estos dos juegos de altitudes elipsoidales se puede ver en el siguiente histograma de diferencias (figura 8).

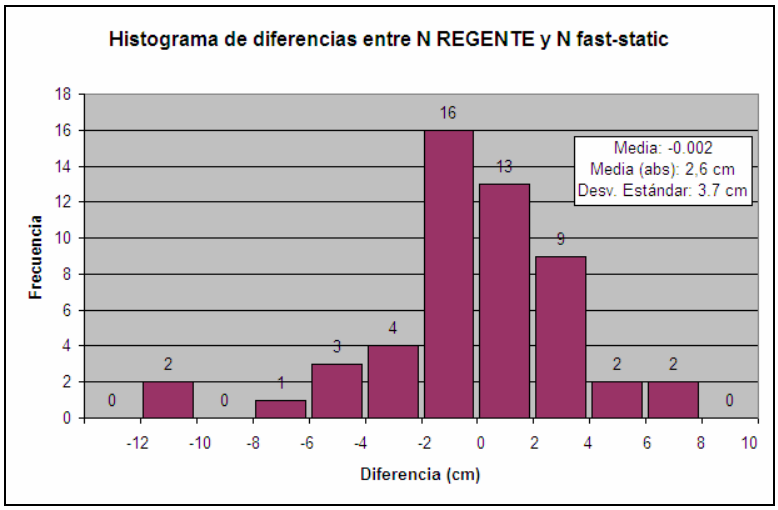


Fig. 9. Histograma de diferencias REGENTE - fast static REDNAP.

El histograma de las diferencias entre $h_{REGENTE}$ y h_{REDNAP} es insegado (promedio de -0.002 m), pero presenta dos puntos, ubicados en la misma zona, con diferencias de 10 cm (Hoja MTN 636, puntos 636A y 636B) cuya altitud ortométrica (no elipsoidal) en la antigua red de nivelación de precisión es probablemente errónea, ya que los puntos fast-static cercanos presentan la misma ondulación del geoide.

La diferencia es inferior a los 4 cm en 42 de los 52 puntos analizados (81%), con un promedio en valor absoluto de las diferencias de 2,3 cm y una desviación estándar de 3,7 cm, cantidad que en las desviaciones típicas de las funciones polinómicas anteriormente comentadas ya se veían.

3.5. Obtención de la superficie de corrección y aplicación a EGM2008.

Para la obtención de los modelos de geoide válidos para España se obtuvieron dos ficheros de ondulación EGM2008 (uno para Península, Baleares, Ceuta y Melilla y otro para Canarias), con un paso de malla de 1' x 1' con los siguientes límites:

- Península, Baleares, Ceuta y Melilla:

  Longitud: 9º 30' W - 4º 30' E
  Latitud: 35º N - 44 º N

- Canarias:

  Longitud: 18º 30' W - 13º W
  Latitud: 27º 30' N - 29º 30' N

Con estos modelos gravimétricos se obtuvieron valores de ondulación EGM2008 para los 12700 puntos de la península y los casi 1000 puntos de Canarias, obteniendo unas diferencias entre los valores observados y los calculados por el modelo, diferencias que darán una superficie de corrección y adaptación a REDNAP de EGM2008 gravimétrico.

En el caso del modelo para Península y Baleares, las diferencias obtenidas (teniendo en cuenta el offset de 56.1 cm anteriormente citado) fueron en la península un máximo de 19.3 cm y un mínimo de -22.5 cm, mientras que en Baleares el comportamiento de las diferencias era siempre con signo negativo, un mínimo de -25.3 cm y un máximo de -2.0 cm, con un promedio aquí de -14.7 cm, es decir, una amplitud de 0.23 m. El comportamiento era similar en las cuatro islas del archipiélago, lo cual indica que el datum altimétrico entre las diferentes islas es bastante homogéneo y además el datum del archipiélago es más similar al potencial W_0 adoptado por EGM2008 (desplazamiento medio de 41.4 cm).

La desviación estándar tan pequeña del modelo gravimétrico hizo en principio plantearse si era necesaria una superficie de corrección o simplemente sería suficiente tener en cuenta el offset para obtener una superficie modelo que se adaptara al marco altimétrico legal. Sin embargo, las diferencias observadas presentan sistematismos en algunas líneas o zonas que alcanzan el orden decimétrico y hasta de 0,2 m, lo que justifica en algunas zonas, hace que se planteara construir una superficie de correcciones que corrija estas diferencias y obtener un modelo más preciso.

En el caso de Canarias, las diferencias respecto al modelo en las diferentes islas varían mucho, sin duda debido a que los datum altimétricos entre ellas son bastante heterogéneos. Existen islas que tienen referencia mareográfica con una cierta historia, bien definida por una estación mareográfica, y otras en las que no existe ningún mareógrafo y tienen un nivel medio determinado en la década de los cincuenta con reglas de marea referidas a señales ya desaparecidas (El Hierro y La Gomera).

Las diferencias promedio que se obtuvieron para cada isla fueron:

- Lanzarote: 0.212 m
- Fuerteventura: 0.044 m
- Gran Canaria: 0.100 m
- Tenerife: 0.086 m
- La Gomera: -0.267 m
- La Palma: 0.010 m
- El Hierro: 0.169 m

Dentro de cada isla, la amplitud en las diferencias observadas es bastante reducida, como máximo del orden de 0.2 m, excepto en el caso de Tenerife, donde alcanza los 0.3 m, aspecto que puede ser explicable por el relieve de la isla y por tanto, factores isostáticos en la determinación del modelo gravimétrico.

En cualquier caso, el cálculo de una superficie de corrección en el caso de las Islas Canarias, debe hacerse de modo independiente para cada isla, de tal manera que los diferentes orígenes de altitudes no tengan influencia sobre otra isla cercana.

La elección del algoritmo para generar la superficie de corrección, aunque es una cuestión importante, se ha comprobado que no tiene apenas influencia en el resultado final, dado que los valores de corrección son bastante pequeños.

Una cuestión importante que condiciona la elección del algoritmo es la distribución de los puntos dato, ya que si bien el número de puntos de la superficie de corrección es bastante elevado (unos 12.700 para la península y Baleares y casi 1.000 puntos para las Islas Canarias), la distribución, obviamente, es muy irregular, a lo largo de las líneas de nivelación de REDNAP. Si esta cantidad de puntos estuviera regularmente distribuida sobre la superficie del territorio (pensemos, por ejemplo, en la red geodésica ROI), la elección de un algoritmo para calcular la superficie de corrección sería una cuestión sin importancia, ya que cualquiera daría excelentes resultados.

La mayoría de las experiencias llevadas a cabo en otros países para la combinación de un geoide gravimétrico con datos GPS / nivelación de precisión, se han realizado mediante el método de colocación mínimo cuadrático (Denker, 1998, Milbert, 1995, Forsberg, 1998, Featherstone, 2000, etc), aunque normalmente se han realizado con pocos puntos en superficies bastante extensas (AUSGeoid-GPS-AHD en Australia o GEOID09 y GPSBM09 en EEUU, estos basados también en EGM2008).

Otras técnicas probadas incluyen sólo un factor constante de corrección o bien una superficie con ángulos de inclinación o con ajustes polinómicos de segundo o tercer orden (Featherstone et al, 2002).

También han sido probados modelos paramétricos que tratan de modelar las diferencias entre el modelo gravimétrico y el geométrico mediante tres factores como tendencia (t), señal (s) y ruido (n) y un ajuste posterior mediante colocación mínimo-cuadrática (Duquenne et al, 1996).

Otros autores proponen primero una transformación Helmert con 4 parámetros que absorven cambio de datum y posibles errores tanto de nivelación como de GPS y de ondulación del geoide, estableciendo finalmente con las diferencias una colocación mínimo-cuadrática (Sevilla, M. J., 2006).

En cualquier caso, la mayor parte de los algoritmos utilizados para adaptar el modelo de geoide al datum vertical están basados en colocación mínimo-cuadrática, encontrando algunas variaciones, como el kriging. Sin embargo, la distribución tan irregular de los datos en REDNAP, a lo largo de líneas y con zonas relativamente extensas sin datos en el interior de los polígonos, hacen que la función covarianza en esas zonas tenga una difícil representación de los datos, por lo que la colocación mínimo-cuadrática es más difícil que resulte exitosa en este caso.

Debido a la dispersión nominal de los datos de corrección anteriormente discutida (desviación estándar de 3,7 cm), el interpolador que se necesita no debe de pasar por los puntos, sino simplemente ajustarse a ellos con una tendencia de la manera más suave posible. Por otra parte, debido a la gran densidad espacial de puntos a lo largo de la línea de nivelación, el algoritmo debe seguir la tendencia marcada, de tal manera que, aunque la precisión nominal del valor puede estar en ese orden, la superficie reconstruida sin pasar por los puntos dato puede resultar mejorada en su precisión final y, sobre todo, de acuerdo con la "superficie oficial de referencia".

Por otra parte, los valores de la superficie de corrección, bastante pequeños (93% por debajo de 0,1 m) y uniformes zonalmente, hacen que dicha superficie sea muy suave y represente pequeñas irregularidades locales cuando varios puntos en la zona así lo reflejan.

Hay otros algoritmos diferentes semejantes a la colocación mínimo cuadrática para generar la superficie de corrección y el resultado de las pruebas realizadas han sido bastante similares debido, como se ha dicho, a que las correcciones son pequeñas, si bien el que mejor cumplía todas las premisas anteriormente comentadas fue el algoritmo de superficies de mínima curvatura. Este algoritmo se basa en la "mecánica de la lámina delgada" de la teoría de la elasticidad, de tal forma que la lámina se deformaría bajo la acción de fuerzas perpendiculares a su superficie con un criterio de mínima curvatura posible, anulando los esfuerzos no tangenciales fuera de los "puntos dato". El algoritmo de mínima curvatura no es propiamente un interpolador, pero cumple la premisa, y por otro lado, genera la superficie más suave posible con el conjunto de datos disponible sin alterar las zonas periféricas sin datos. Se probó también el interpolador kriging, resultando menos apropiado por la distribución espacial de los datos, ya que las funciones variograma sólo se pueden generar en el sentido de las líneas de nivelación.

Los resultados numéricos para la elección del algoritmo fueron contrastados en puntos de ampliación de REDNAP (GPS de 30 minutos desde un vértice REGENTE a menos de 25 km). Es decir, se generó el modelo resultante con cada uno de los algoritmos probados sin tener en cuenta estos puntos test y se obtuvieron las diferencias entre el modelo resultante y la observación, la cual se considera más fiable que los puntos estático-rápido. Los resultados se pueden ver en el apartado siguiente. Tambíen la figura 11 muestra las diferencias entre ambos interpoladores (kriging y mínima curvatura), no superando estas diferencias según el algortimo utilizado los 2-3 cm en prácticamente todo el territorio.

Las figuras 9 y 10 muestran la superficie de corrección resultante mediante el algoritmo de superficie de mínima curvatura en Península y Baleares, no existiendo, como se puede apreciar, un sistematismo zonal con respecto al modelo de geoide en el sistema de referencia vertical dado por REDNAP.

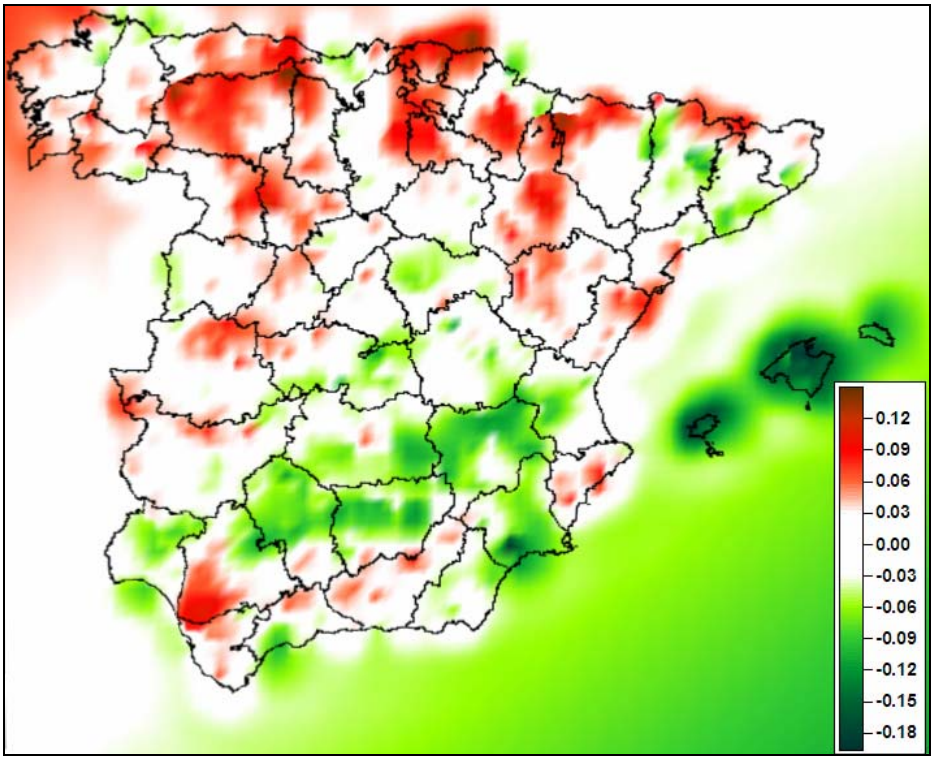


Fig. 10. Superficie de corrección por mínima curvatura.

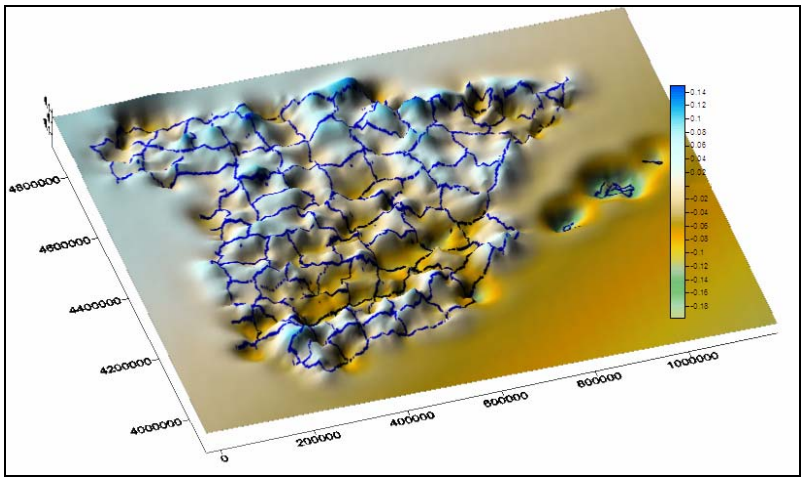


Fig. 11. Superficie de corrección por mínima curvatura y líneas de nivelación utilizadas.

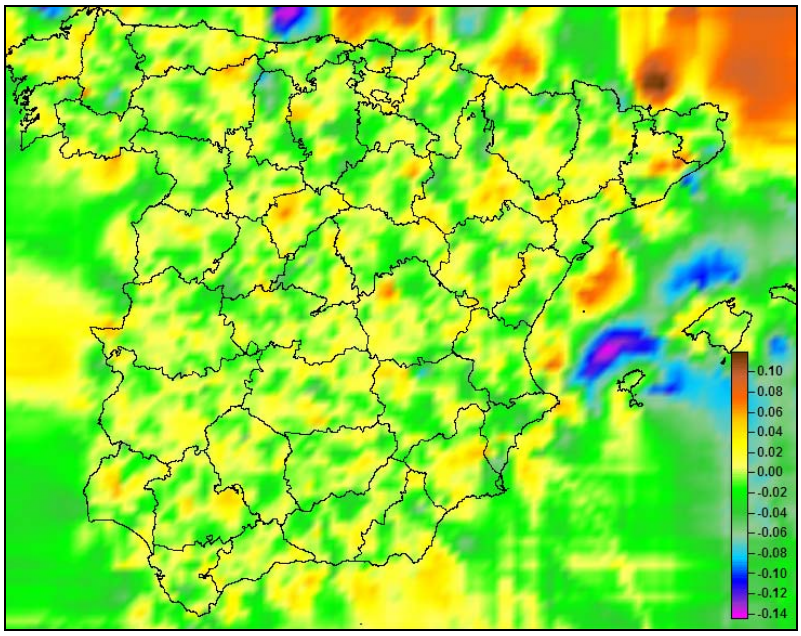


Fig. 12. Diferencias entre algoritmo mínima curvatura y kriging.

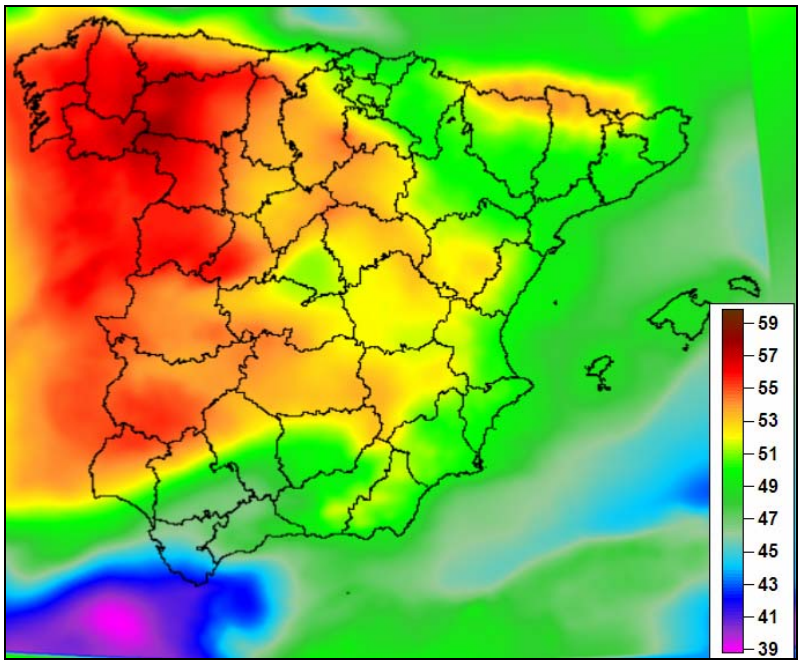


Fig. 13. Modelo final de geoide EGM2008-REDNAP.

4. EVALUACIÓN DE LA PRECISIÓN DEL MODELO EGM2008-REDNAP.

Teniendo en cuenta que las superficies altimétricas de referencia que están constriñendo el modelo final son REGENTE y REDNAP, es lógico que la precisión final del modelo con la superficie de corrección dependa en cierto modo de la distancia del punto considerado a las líneas de nivelación más cercanas.

Se ha realizado un chequeo del modelo sobre un total de 188 señales de la ampliación de REDNAP con el modelo EGM08-REDNAP obtenido sin la intervención de estos datos. Como se ha dicho

anteriormente, en la ampliación de REDNAP, la observación GPS, que al fin y al cabo determina la calidad, fue de 30 minutos desde un vértice REGENTE situado a menos de 20 km de distancia, con estacionamiento estricto sobre la señal, de tal forma que la altitud elipsoidal pudo ser determinada con una precisión del orden de 2 - 3 cm, aunque este factor puede depender también del software y los parámetros de cálculo utilizados.

Los resultados de la comparación de ondulación del geoide observación - modelo pueden verse en la tabla 2. Hay que tener en cuenta que estas líneas recorren espacios vacíos de datos inicialmente en los que el punto dato más cercano puede estar a más de 50 km.

Tabla 2. Resultados en señales ampliación REDNAP.

Línea REDNAP	Nº señales observadas	Diferencia promedio (m)	Desviación estándar (m)
813	12	0.031	0.038
822	17	0.017	0.021
823	18	0.052	0.030
824	16	0.028	0.036
825	18	0.027	0.033
827	19	0.052	0.059
829	23	0.059	0.031
830	16	0.026	0.034
831	19	0.050	0.032
832	14	0.050	0.061
833	16	0.035	0.045
Promedio	**Total 188**	**0.038**	**0.038**

A la vista de los resultados, se puede afirmar que la desviación estándar y la diferencia promedio (en valor absoluto) entre los valores observados y los valores del modelo es de 0.038 m, habiendo sido el 80% de las diferencias inferiores a 0,05 m.

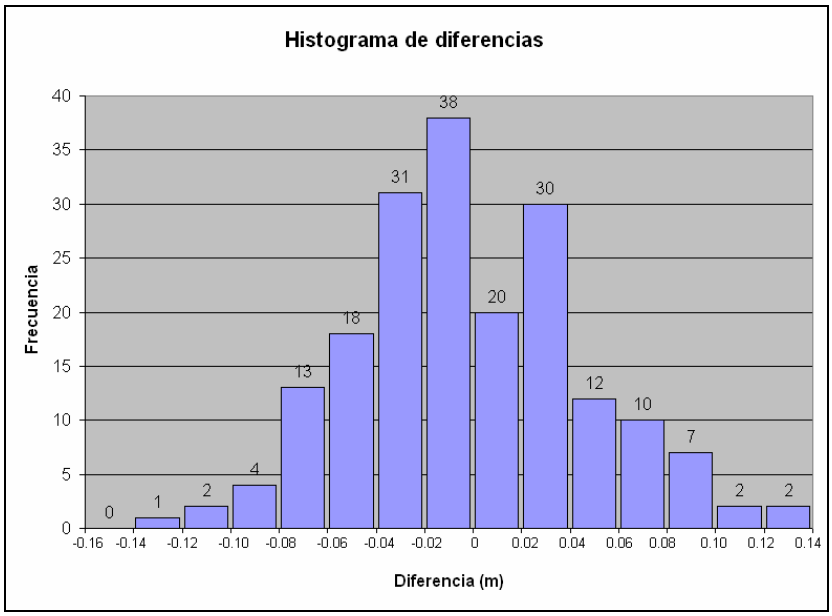


Fig. 14. Histograma de diferencias en ampliación de REDNAP.

Esto en lo que se refiere a la precisión absoluta del modelo. Pero la utilización práctica del modelo y su aplicación en trabajos GNSS en los que se requiera la altitud ortométrica hace que la evaluación de la precisión tenga que hacerse también en modo relativo, en tanto en cuanto se calcula la ondulación de un punto con respecto a otros en la zona de trabajo, dependiente de la distancia, por lo que es conveniente utilizar para ello el concepto de precisión relativa (en partes por millón).

En este sentido, también se han analizado las diferencias en la ampliación REDNAP respecto al modelo en cada una de las once líneas, comparando para ello las diferencias relativas entre las señales de cada línea, obteniendo una estimación de la precisión relativa de 2 ppm.

5. EXPLOTACIÓN PRÁCTICA DEL MODELO EGM2008-REDNAP.

Para la utilización del modelo por parte de los usuarios se ha diseñado un software que contiene este modelo y además otras utilidades, denominado Programa de Aplicaciones Geodésicas (PAG).

El programa de Aplicaciones Geodésicas (PAG) consta de cuatro menús principales que operan de forma independiente:

Calculadora Geodésica

- Paso de coordenadas Geográficas a UTM y viceversa.
- Cambio de Sistema de Referencia Geodésico ED50-ETRS89.
- Cálculo de la ondulación del Geoide y desviación de la vertical basado en el modelo EGM2008 ajustado a REDNAP.

El usuario puede introducir los datos de entrada de forma manual o mediante fichero.

Datos GNSS

Esta utilidad permite descargar datos GNSS de la red de estaciones permanentes del Instituto Geográfico Nacional. Para ello es necesario estar conectado a internet y seleccionar en un calendario el día requerido, el tipo de datos (horarios a 1, 5, 15 o 30 segundos de intervalo de toma de datos o diarios a 30 segundos) y las estaciones de las que se desean los datos en un mapa. Se puede hacer un chequeo previo de los datos para comprobar su disponibilidad.

Redes Geodésicas

Esta aplicación da acceso a un navegador Web para representar sobre la cartografía de Google Maps la infraestructura geodesia que dispone el IGN en cuatro capas fundamentales: estaciones permanentes GNSS, vértices REGENTE, vértices ROI y señales REDNAP. Proporciona una información sobre la distribución espacial y permite el acceso a la reseña oficial en formato PDF de cada uno de los elementos.

Actualizaciones

Esta parte del programa tiene como función básica informar sobre las actualizaciones disponibles. Las actualizaciones que se contemplan son:

- Una nueva versión del programa.
- Nueva rejilla de Modelo de Geoide EGM08-REDNAP.
- Nueva rejilla de cambio de Sistema de Referencia Geodésico.
- Actualización de la red de estaciones permanentes ERGNSS.
- Actualización de la Red de Nivelación de Alta Precisión.
- Actualización de la Red REGENTE.
- Actualización de la ROI.

En el futuro se incorporarán nuevas versiones del programa con algunas utilidades más. Para descargar la aplicación se puede acceder al servidor FTP de datos públicos del Centro de Observaciones Geodésicas, dentro de la carpeta utilidades: ftp://ftp.geodesia.ign.es

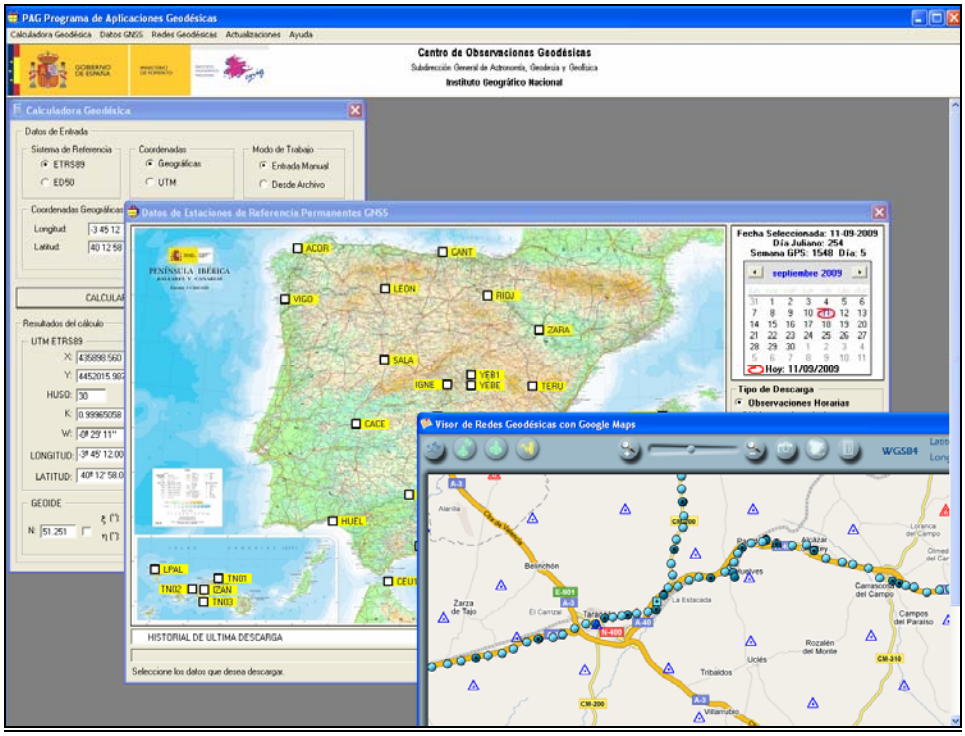


Fig. 15. Programa de Aplicaciones Geodésicas (PAG).

A medida que se vayan realizando observaciones adicionales de líneas de nivelación dentro del proyecto de ampliación de REDNAP, estos datos servirán para generar nuevas versiones de EGM2008-REDNAP que se incluirán a su vez en nuevas versiones del PAG.

También se ha dispuesto en el servidor FTP una carpeta denominada "geoide" donde se pueden encontrar en formato ASCII los dos modelos para Península y Canarias y en otros formatos de casas comerciales (Leica, Topcon y Trimble) para su utilización directa en receptores RTK, así como en formato GeoLab, para su utilización con este software de ajuste de redes geodésicas.

6. REFERENCIAS.

- Barbadillo, A., Sánchez Sobrino, J. A., de la Cruz, F., Quirós, R. (2008): *Compensación preliminar de la nueva Red Española de Nivelación de Alta Precisión*. 6ª Asamblea Hispano-lusa de geodesia y geofísica. Tomar, febrero 2008.

- Corchete, V., Chourak, M., Khattach, D. (2005): *The high resolution gravimetric geoid of Iberia: IGG2005*. Geophysical Journal International, Volumen 162, pp. 676-684.

- Daniel R. Roman, Yan Ming Wang, Jarir Saleh, Xiaopeng Li (2009): *National Geoid Height Models for the United States: USGG2009 and GEOID09*. ACSM-MARLS-UCLS-WFPS Conference 2009, 20-23 feb. 2009. Salt Lake City.

- Denker, H. (1998): *Evaluation and improvement of the EGG97 quasigeoid model for Europe by GPS and levelling data.* Second Cont. Workshop on the Geoid in Europe, Rep. Finn. Geod. Inst. 98:4, 53-61, Masala,1998.

- Denker, H., W. Torge (1997): *The European gravimetric quasigeoid EGG97 - An IAG supported continental enterprise.* In: IAG Symp. Proceed., IAG Scient. Ass. Rio de Janeiro, 1997, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

- Duquenne, H., M. Everaerts, P. Lambot (2004): *Merging a Gravimetric Model of the Geoid with GPS/Levelling data: an Example in Belgium.* International Association of Geodesy Symposia Gravity,Geoid and Space Missions. GGSM 2004 IAG International Symposium Porto, Portugal August 30 – September 3, 2004.

- Featherstone, W.E. (2000): *Refinement of a gravimetric geoid using GPS and levelling data.* Journal of Surveying Engineering, 126(2): 27-56.

- Featherstone, W.E., J.F. Kirby, A.H.W. Kearsley, J.R. Gilliland, G.M. Johnston, J. Steed, R. Forsberg and M.G. Sideris (2001): *The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data.* Journal of Geodesy, 75(5/6): 313-330.

- Featherstone, W.E. (1998): *Do we need a gravimetric geoid or a model of the base of the Australian Height Datum to transform GPS heights?*. The Australian Surveyor, 43(4): 273-280.

- Fotopoulos, G., C. Kotsakis and M.G. Sideris (1999): *A new Canadian geoid model in support of levelling by GPS.* Geomatica, 53(4): 53-62.

- Fotopoulos, G., W.E. Featherstone and M.G. Sideris (2002): *Fitting a gravimetric geoid model to the Australian Height Datum via GPS data.* Third Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, Aug. 26-30, 2002.

- Forsberg, R. (1998b): *Geoid tailoring to GPS - with example of a 1-cm geoid of Denmark.* Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe, Report 98:4, Finnish Geodetic Institute, Masala, 191-198.

- Ihde, J. (1995): *Geoid Determination by GPS and Levelling*. International Association of Geodesy. Symposia 113, Gravity and Geoid. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg

- Jiang, Z. and Duquenne, H. (1996): *On the combined adjustment of gravimetrically determined geoid and GPS levelling stations. Journal of Geodesy*, 70: 505-514.

- Martín A., Anquela A.B., Padín J., Berné J.L. (2009): *Hacia una nueva era en la determinación de modelos de geoide. Análisis del nuevo modelo geopotencial global EGM2008*. Setmana Geomàtica Internacional. Barcelona, Marzo de 2009.

- Milbert, D.G. (1995): *Improvement of a high resolution geoid height model in the United States by GPS height on NAVD 88 benchmarks.* Bull. d'Informations 77 and IGeS Bull. 4, Special Issue, New Geoids in the World, 13-16, Milan, Toulouse.

- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. (2008): *An Earth Gravitational model to degree 2160: EGM2008*. EGUgeneral Assembly 2008, Viena, Austria.

- Sevilla, M. J. (2006): *IBERGEO_2006.* 5ª Asamblea Hispano-lusa de geodesia y Geofísica. Sevilla, febrero 2006.

- Vanicek, P., Christou, N.T. (1994): *Geoid and its Geophysical Interpretations*. CRC Press, Boca Raton, Florida.